جامعة الإخوة منتوري- قسنطينة 1

قسم الفيزياء

مقياس الفيزياء 1

مكانيك النقطة المادية

السنة الأولى علوم المادة

لمين حمدلو

أستاذ محاضر قسم أ

مدخل : أصل كلمة مكانيك من "mêkhanê" التي تعني "machine" أي آلة ، ولهذا فهي تعرف بالعلم الذي يدرس **قوانين الحركة والسكون**. هذا الفرع من العلوم التجريبية يعد من أقدم النظريات الفيزيائية.

تتناول المكانيك العامة المظاهر التالية :

- **السكون (la statique)** : وتدرس شروط التوازن لجملة ميكانيكية.

- **حركة النقطة المادية (la cinématique)** : وتصف حركة الأجسام من دون النظر في الأسباب التي أدت إليها.

- **حركية أو تحريك النقطة المادية (la dynamique)** : وتدرس الحركة مع ربطها بالأسباب التي أدت إليها. فهي تسمح بتوقع خصائص الحركة ومسار الجسم عندما تكون القوي التي تؤثر فيه معروفة.

الفصل الأول: مراجعة على الأشعة

I- تعاريف :

1- المقدار السلمي والمقدار الشعاعي :

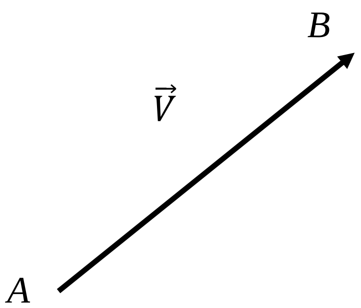
طبيعة المقادير الفيزيائية متنوعة ، فبعضها تسمى

* **مقادير سلمية :** وهي التي يتطلب تحديدها معامل واحد يكون عادة عدد حقيقي (أو دالة) مصحوبا بوحدة القياس. الكتلة m ، درجة الحرارة T ، الزمن t ، الضغط P ، الطاقة E ...إلخ هي مقادير سلمية.

يوجد نوع آخر من المقادير الفيزيائية يسمى

* **المقادير الشعاعية :** وهي التي يتطلب تحديدها زيادة على شدتها ، اتجاه للمقدار. السرعة $\vec{V}$ ، القوة $\vec{F}$ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ ... إلخ هي مقادير شعاعية . تمثل هذه المقادير بسهم يسمى شعاع.

2- الشعاع : الشعاع هو قطعة مستقيمة موجهة يمثل عادة بسهم. الشعاع $\vec{V}$ الذي يكتب برسم سهم فوقه ممثل بالسهم $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$.

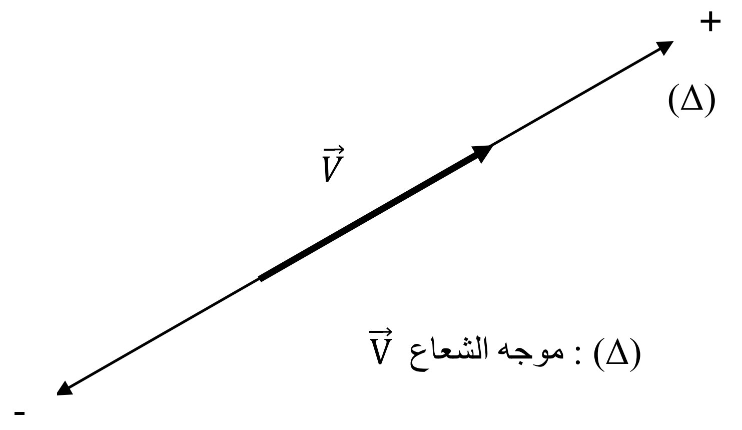


النقطة A هي نقطة بداية الشعاع أو نقطة تأثير الشعاع

النقطة B تمثل نهاية الشعاع وهي التي تحدد اتجاهه و شدته.

طول القطعة AB يمثل قوة أو شدة المقدار الفيزيائي الممثل بالشعاع $\vec{V}$ في النقطة A .

المستقيم الذي يحمل الشعاع ، يمكن توجيهه بطريقة كيفية، ويسمى موجه الشعاع (*direction du vecteur*). كل موجه يمكن أن يأخذ اتجاهين : الاتجاه الموجب الذي هو نفس اتجاه الشعاع والاتجاه السالب المعاكس لاتجاه الشعاع.



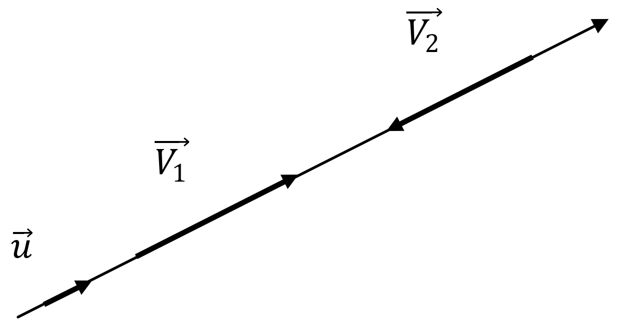
طويلة الشعاع تساوي طول القطعة المستقيمة التي تمثله . يرمز لطويلة الشعاع $\vec{V}$ ب $\|\vec{V}\|$ أو $|\vec{V}|$.

شدة مقدار فيزيائي شعاعي تساوي طويلة الشعاع الذي يمثلها. يكون شعاعان **متساويين** عندما تكون لهما نفس الطويلة ونفس الاتجاه ويكون شعاعان **متعاكسين** عندما تكون لهما نفس الطويلة ولكن اتجاهيهما متعاكسان. $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ متعاكسان يعني أن: $\vec{V} + \vec{V'} = \vec{0}$.

شعاع الوحدة أو **شعاع الواحدة** هو شعاع **طويلته تساوي 1**. يرمز له عادة ب $\vec{u}$ أو $\vec{e}$. شعاع الواحدة $\vec{u}$ للشعاع $\vec{V}$ يعرف بالمقدار الشعاعي $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$.

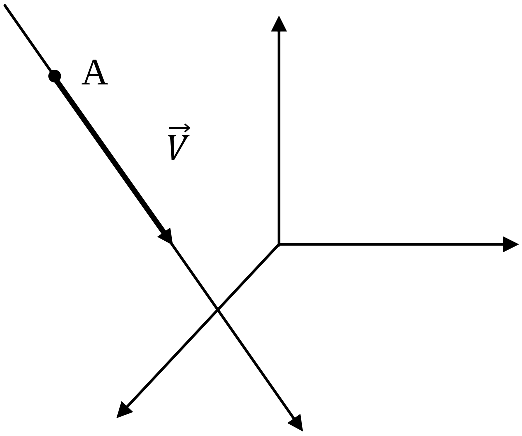
اتجاه موجه الشعاع يحدد عادة باتجاه شعاع الواحدة $\vec{u}$.

لدينا حسب الشكل :

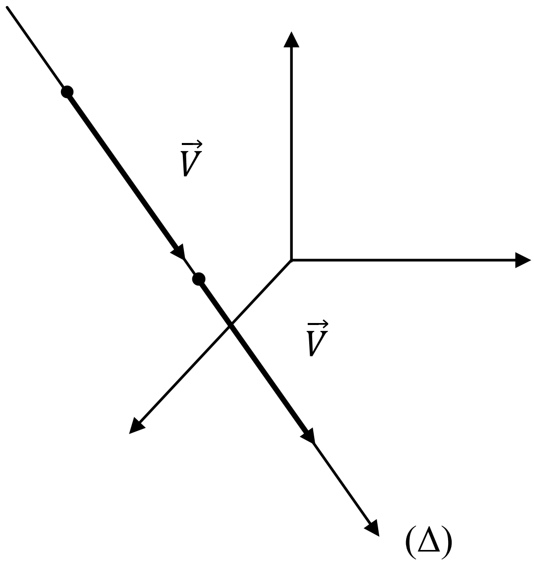


$\overline{V_1}$ و $\overline{V_2}$ هي على التوالي القيم الجبرية للشعاعين $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ على الموجه.

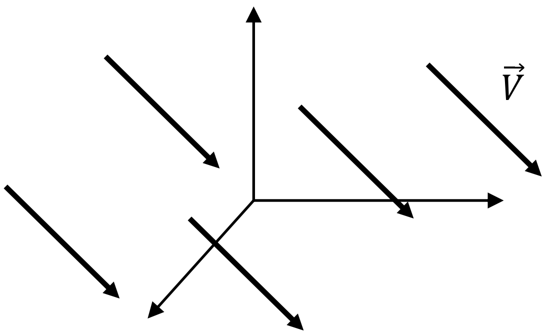
3- **الشعاع المقيد** : في مكانيك النقطة المادية نستعمل أشعة مقيدة مثل شعاع السرعة وشعاع التسارع المقيدان بالنقطة المتحركة . يكون الشعاع المقيد معرفا تماما عند تحديد نقطة تأثيره واتجاهه وطويلته وموجهه.



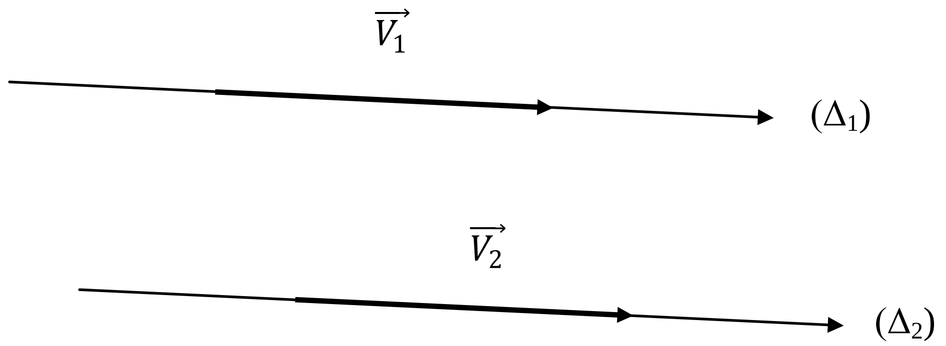
4- **الشعاع المنزلق :** شعاع القوة التي تؤثر على حبل مشدود هو شعاع منزلق . فنقطة التأثير غير محددة على حامل الشعاع . نحصل على **شعاع منزلق** عندما تنتقل نقطة تأثيره على موجه الشعاع (Δ) مع المحافظة على طويلته واتجاهه .



5- **الشعاع الحر:** الحسابات الرياضياتية على الأشعة تستعمل **أشعة حرة** ويكفي لتعريفها طويلة واتجاه ، أما نقطة التأثير فهي نقطة كيفية من الفضاء .



6- **الأشعة المتسايرة :** عندما يكون شعاعان $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ متوازيين ولهما نفس الطويلة ونفس الاتجاه نقول عنهما أنهما **متسايران** .

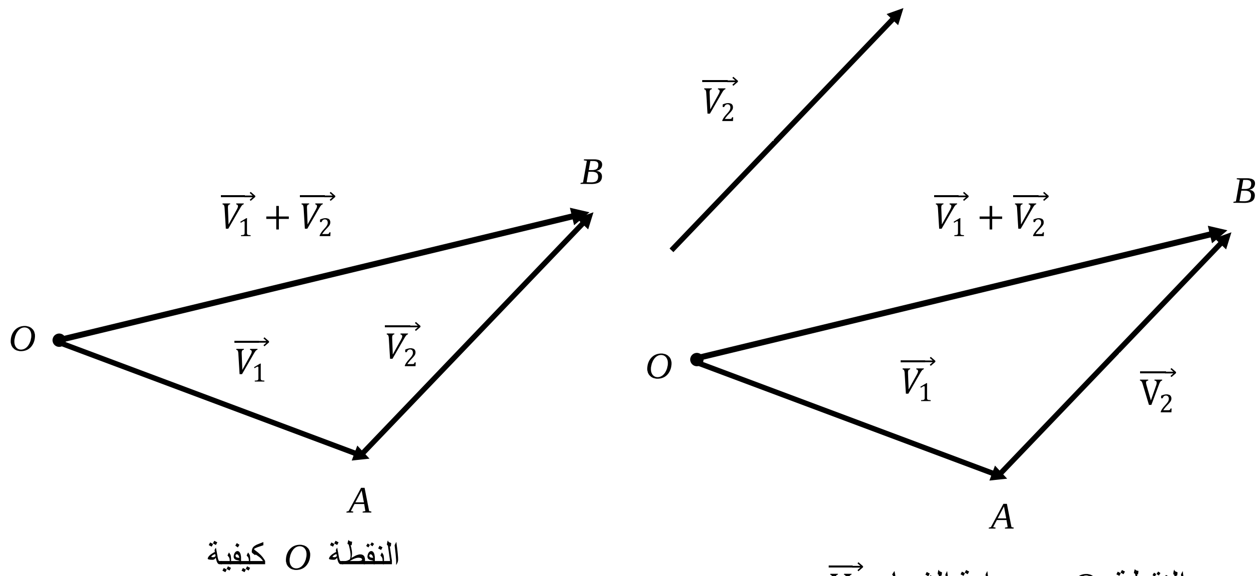


$\|\overrightarrow{V_1}\| = \|\overrightarrow{V_2}\|$ و $(\Delta_1) \mathbin{//} (\Delta_2)$ تستلزم أن $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}$

"شعاعان متسايران هما دائما متساويان"

7- جمع الأشعة : ليكن شعاعان $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$. انطلاقا من أي نقطة O من الفضاء نرسم شعاعا $\overrightarrow{OA}$ مسايرا لـ $\overrightarrow{V_1}$ ثم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ المساير لـ $\overrightarrow{V_2}$. الشعاع $\overrightarrow{OB}$ يساوي **مجموع الشعاعين** $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$

ونكتب : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$.



النقطة O كيفية

النقطة O هي بداية الشعاع $\overrightarrow{V_1}$

خواص جمع الأشعة :

- عملية تبديلية أي : $\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_1}$
- عملية تجميعية أي : $\overrightarrow{V_1}+\left(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}\right)=\left(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\right)+\overrightarrow{V_3}$
- عملية جمع الأشعة تملك عنصرا حياديا : $\vec{V}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{V}=\vec{V}$
- كل شعاع يملك عنصر نظير هو الشعاع المعاكس له : $\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\left(-\vec{V}\right)+\vec{V}=\vec{0}$

خلاصة : عملية الجمع على الأشعة تشكل زمرة تبديلية .

8 - جداء شعاع في مقدار سلمي : ليكن شعاع $\vec{V}$ ومقدار سلمي λ من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

الشعاع $\vec{W}$ الناتج عن جداء $\vec{V}$ في λ هو : $\vec{W}=\lambda.\vec{V}$ ولدينا :

- $\vec{V}$ و $\vec{W}$ لهما نفس الموجه و $\|\vec{W}\|=|\lambda|.\|\vec{V}\|$
- إذا كان $\lambda>0$ فإن $\vec{V}$ و $\vec{W}$ لهما نفس الاتجاه وإذا كان $\lambda<0$ فهما في الاتجاه المعاكس .

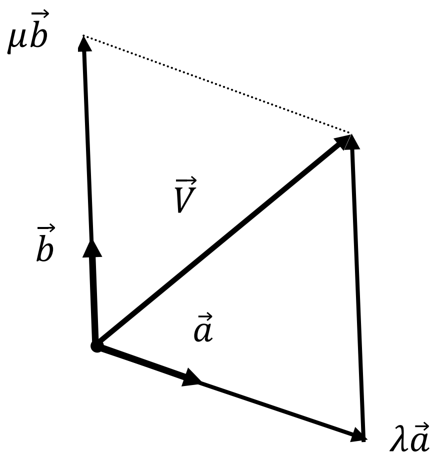
خواص الجداء في مقدار سلمي : جداء شعاع في مقدار سلمي يملك الخاصية التوزيعية أي :

$$\lambda\left(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\right)=\lambda\overrightarrow{V_1}+\lambda\overrightarrow{V_2} \quad \text{و} \quad (\lambda+\mu)\vec{V}=\lambda\vec{V}+\mu\vec{V} \quad \text{و} \quad \lambda\left(\mu\vec{V}\right)=(\lambda\mu)\vec{V}$$

- القسمة على مقدار سلمي : $\dfrac{\vec{V}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}.\vec{V}$ **(قسمة شعاع على شعاع ممنوعة)**

9 ـ **قاعدة التمثيل و نظام الإحداثيات :** باستعمال خواص جمع الأشعة والجداء في مقدار سلمي ، يمكن أن نكتب أي شعاع $\vec{V}$ على شكل علاقة خطية لشعاعين غير متوازيين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$ أي :

$\vec{V} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. الثنائي $(\vec{a}, \vec{b})$ يمكن أن يستعمل كقاعدة لتمثيل كل الأشعة التي تنتمي إلى



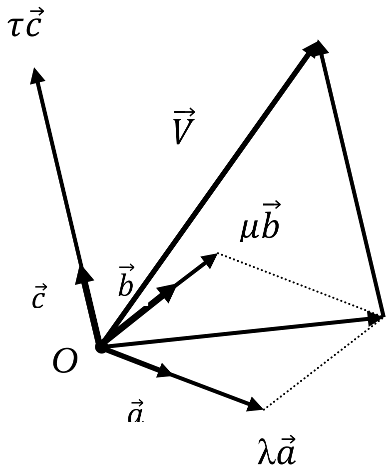
المستوي $(\vec{a}, \vec{b})$. λ و μ تسمى مركبات الشعاع في هذه القاعدة .

عندما يكون $\vec{V}$ لا ينتمي إلى المستوي $(\vec{a}, \vec{b})$ ، يجب إضافة شعاع

ثالث $\vec{c}$ لكتابة أي شعاع من الفضاء ذي الثلاثة أبعاد بحيث

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \nparallel \vec{c}$ والقاعدة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ تشكل ما يعرف بالقاعدة المباشرة .

ونكتب : $\vec{V} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \tau\vec{c}$. λ و μ و τ هي مركبات الشعاع $\vec{V}$ في القاعدة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.



بإضافة نقطة بداية O إلى القاعدة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ نحصل على

المعلم $(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. إحداثيات النقطة O في المعلم

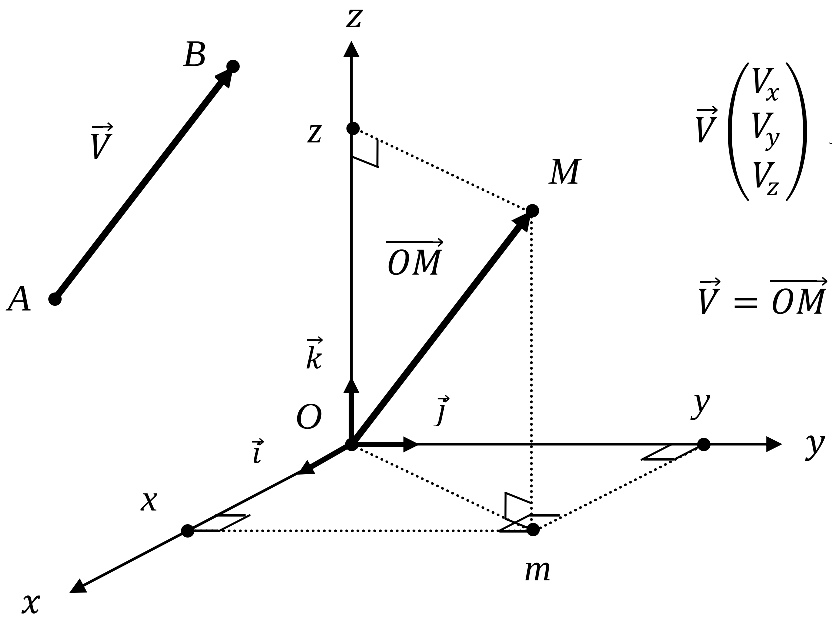
$(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ هي $(0,0,0)$.

القاعدة المتعامدة المتجانسة : هي القاعدة الخاصة التي يكون فيها :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c} \quad \text{و} \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$$

10 - **مركبات شعاع في معلم متعامد متجانس :** نعتبر ثلاثة محاور $\overrightarrow{x'Ox}$ و $\overrightarrow{y'Oy}$ و $\overrightarrow{z'Oz}$ متعامدة فيما بينها وتتقاطع في النقطة O ومصحوبة بأشعة الواحدة $\vec{\imath}$ ، $\vec{\jmath}$ ، $\vec{k}$ على التوالي . موقع نقطة كيفية M في الفضاء محدد في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بالإحداثيات (x , y , z) والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يكتب :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. x و y و z تسمى أيضا مركبات الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في المعلم الديكارتي $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ونكتب عادة : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.



لدينا : $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$ أو $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

الشعاعان $\vec{V}$ و $\overrightarrow{OM}$ متسايران $\Leftrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{OM}$

ونحصل على ذلك لما :

$$(V_x = x , V_y = y , V_z = z)$$

عندما نأخذ : $\varphi = (\overrightarrow{Ox} , \overrightarrow{Om})$ و $(\overrightarrow{Oz} , \overrightarrow{OM}) = \theta$ ، يمكن أن نكتب :

$$V_x = x = \|\vec{V}\|.cos\varphi.sin\theta \quad و \quad V_y = y = \|\vec{V}\|.sin\varphi.sin\theta \quad و \quad V_z = z = \|\vec{V}\|.cos\theta$$

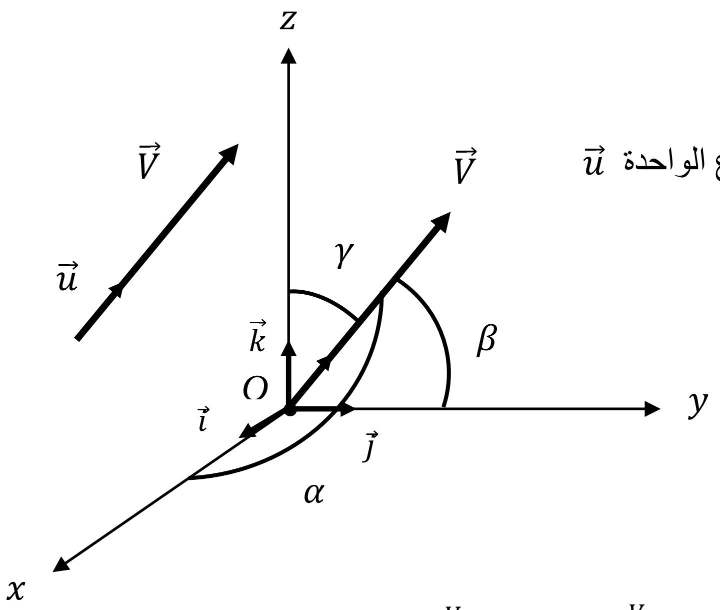
مع $\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$.

عندا تكون النقطة A هي بداية الشعاع $\vec{V}$ والنقطة B هي نهايته فإن الشعاع $\vec{V}$ يكتب :

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k} \quad أو \quad \vec{V}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

حيث $(x_A\ ,y_A\ ,z_A)$ هي إحداثيات النقطة A و $(x_B\ ,y_B\ ,z_B)$ هي إحداثيات النقطة B .

11- شعاع الواحدة وجيوب التمام الموجهة :



نعتبر شعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$ وشعاع واحدته $\vec{u}$. شعاع الواحدة $\vec{u}$

Iللشعاع $\vec{V}$ يكتب : $\vec{u}=\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

أي : $\vec{u}=\frac{V_x}{\|\vec{V}\|}\vec{\imath}+\frac{V_y}{\|\vec{V}\|}\vec{\jmath}+\frac{V_z}{\|\vec{V}\|}\vec{k}$

مركبات شعاع الواحدة $\vec{u}$ هي إذن : $u_x=\frac{V_x}{\|\vec{V}\|}$ ، $u_y=\frac{V_y}{\|\vec{V}\|}$ ، $u_z=\frac{V_z}{\|\vec{V}\|}$

عندما نأخذ الزوايا $(\alpha\ ,\beta\ ,\gamma)$ هي : $\alpha=(\overrightarrow{Ox}\ ,\vec{V})$ و $\beta=(\overrightarrow{Oy}\ ,\vec{V})$ و $\gamma=(\overrightarrow{Oz}\ ,\vec{V})$ ،

فإن : $cos\alpha=\frac{V_x}{\|\vec{V}\|}$ و $cos\beta=\frac{V_y}{\|\vec{V}\|}$ و $cos\gamma=\frac{V_z}{\|\vec{V}\|}$ ويمكن أن نكتب إذن :

$\vec{u}=cos\alpha.\vec{\imath}+cos\beta.\vec{\jmath}+cos\gamma.\vec{k}$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}cos\alpha\\cos\beta\\cos\gamma\end{pmatrix}$. $cos\alpha$ و $cos\beta$ و $cos\gamma$ تسمى

جيوب التمام الموجهة للشعاع $\vec{V}$ ونحصل عليها مباشرة بحساب مركبات شعاع الواحدة $\vec{u}$. α و β و

γ تسمى زوايا **ألر (*Euler*)** . يمكن أن نثبت بسهولة أن : $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$.

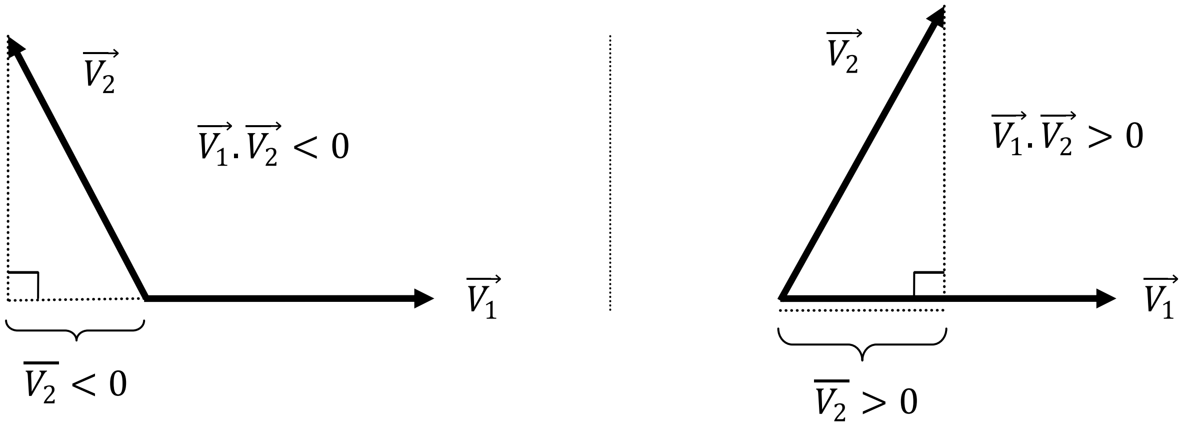
II- عمليات على الأشعة :

1- الجداء السلمي : ليكن شعاعان $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$. نعرف الجداء السلمي $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$ بالمقدار السلمي

$\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.cos(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$ ونكتب : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.cos(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$

لما : $-\frac{\pi}{2} < (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) < \pi/2$ فإن $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} > 0$

وعندما : $\frac{\pi}{2} < (\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) < 3\pi/2$ فإن $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} < 0$.



$\overline{V_2}$ هوالقيمة الجبرية لإسقاط $\overrightarrow{V_2}$ على موجه $\overrightarrow{V_1}$

بطريقة أخرى ، يمكن أن نعبر عن الجداء السلمي كالتالي :

$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$ = طويلة $\overrightarrow{V_1}$ × القيمة الجبرية لإسقاط $\overrightarrow{V_2}$ على موجه $\overrightarrow{V_1}$ أو العكس .

أي : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \|\overrightarrow{V_1}\|.\overline{V_2}$ أو : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \|\overrightarrow{V_2}\|.\overline{V_1}$

- خواص الجداء السلمي :

- تبديلي : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$
- على العموم غير تجميعي : $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C}) \neq (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$
- توزيعي بالنسبة لجمع ا لأشعة : $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$
- توزيعي بالنسبة للجداء في مقدار سلمي : $\alpha.\vec{A}.\beta.\vec{B} = \alpha.\beta.\vec{A}.\vec{B}$

ملاحظة : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{A}.\vec{C} \nRightarrow \vec{B} = \vec{C}$

- العبارة التحليلية للجداء السلمي : في معلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ لدينا :

$\overrightarrow{V_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ أو $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ أو $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

الجداء السلمي $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$ يكتب : $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$

لأن : $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ و $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

ويمكن أن نكتب أيضا : $\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)^{\frac{1}{2}}$

و : $cos(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}) = \frac{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}}{\|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|} = \frac{x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}.\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$

و شعاع الواحدة $\overrightarrow{u_1}$ للشعاع $\overrightarrow{V_1}$:

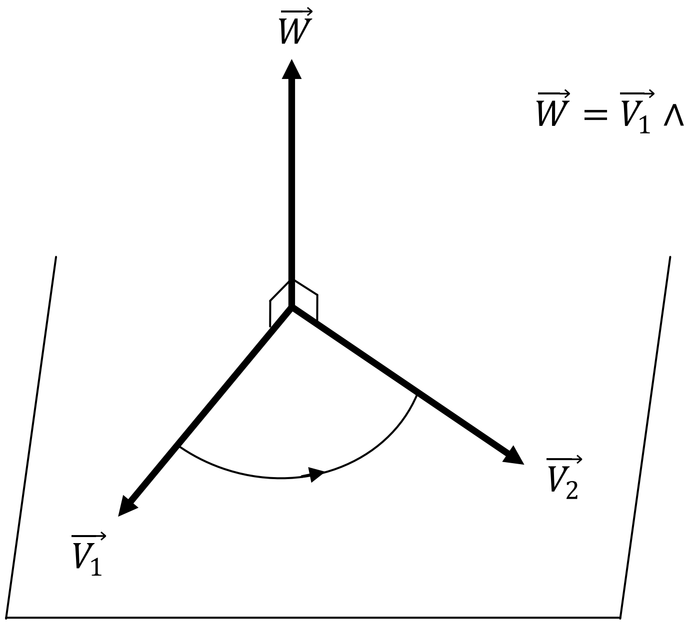
$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|} = \frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}}.\vec{i} + \frac{y_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}}.\vec{j} + \frac{z_1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}}.\vec{k}$$

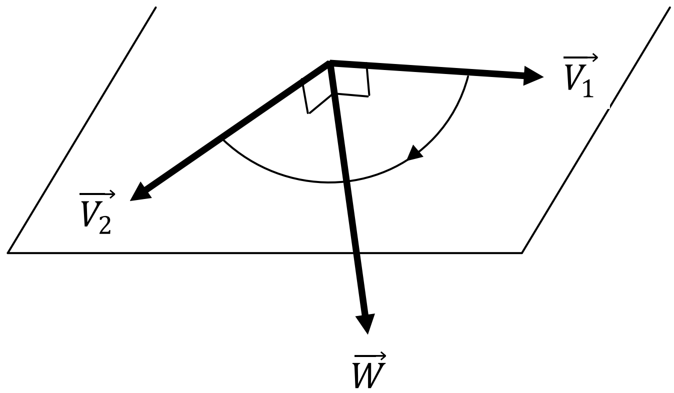
2 - الجداء الشعاعي : ليكن الشعاعان $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$. نعرف الجداء الشعاعي $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ بالشعاع :

$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ حيث :

- $\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.sin(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$
- $\overrightarrow{W}$ عمودي على المستوي $(\overrightarrow{V_1}\,,\overrightarrow{V_2})$ الذي يشكله الشعاعان $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$.
- اتجاه $\overrightarrow{W}$ هو بحيث القاعدة $(\overrightarrow{V_1}\,,\overrightarrow{V_2}\,,\overrightarrow{W})$ تكون قاعدة مباشرة .

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$$





- خواص الجداء الشعاعي :

- ضد (عكس) تبديلي : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- غير تجميعي : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$
- $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{0}$ أو $\vec{B} = \vec{0}$ أو $\vec{A} \parallel \vec{B}$
- توزيعي بالنسبة لجمع ا لأشعة : $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
- توزيعي بالنسبة للجداء في مقدار سلمي : $\alpha.\vec{A} \wedge \beta.\vec{B} = \alpha.\beta.\vec{A} \wedge \vec{B}$

نتيجة : في القاعدة المتعامدة المتجانسة $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \;،\; \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;،\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;،\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

- **العبارة التحليلية للجداء الشعاعي :** في معلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ لدينا :

$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}$. مركبات الشعاع $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{pmatrix}$ تحسب كما يلي :

- المركبة W_x : $\begin{pmatrix}W_x\\-\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1.z_2-z_1.y_2\\-\\-\end{pmatrix}$ حيث: السهم $\longrightarrow$

يشير إلى جداء بالأشارة + والسهم ......► يشير إلى جداء بالأشارة − . وبنفس الكيفية نحسب

- المركبة W_y : $\begin{pmatrix}-\\W_y\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-\\z_1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x_2\\-\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\z_1.x_2-x_1.z_2\\-\end{pmatrix}$

- المركبة W_z : $\begin{pmatrix}-\\-\\W_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\-\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\-\\x_1.y_2-y_1.x_2\end{pmatrix}$

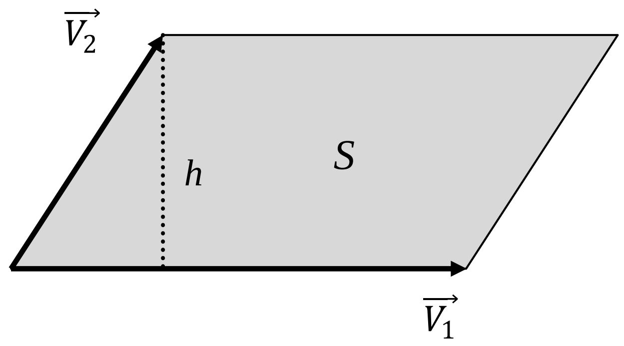
أي : $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}y_1.z_2-z_1.y_2\\z_1.x_2-x_1.z_2\\x_1.y_2-y_1.x_2\end{pmatrix}$

توجد طريقة أخرى لحساب الجداء الشعاعي $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}$ تسمى طريقة المحدد .

$$\overrightarrow{W}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1.z_2-z_1.y_2).\vec{i}-(x_1.z_2-z_1.x_2).\vec{j}$$

$$+(x_1.y_2-x_2.y_1).\vec{k}$$

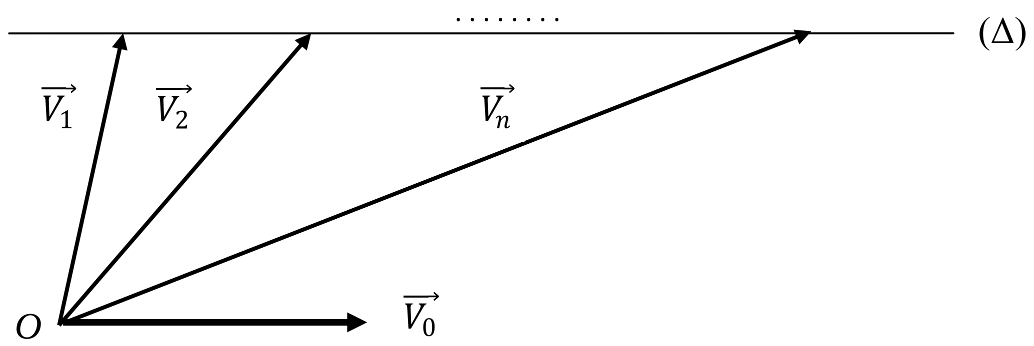
● **المعنى الهندسي للجداء الشعاعي :** مساحة متوازي ا لأضلاع S المشكلة على $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ تساوي طويلة الجداء الشعاعي $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ أو $S = \|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\| = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.sin(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$



$$S = \|\overrightarrow{V_1}\|.h = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.sin(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$$

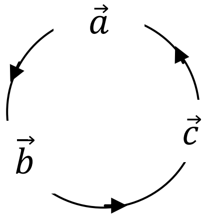
● **نتيجة :** المستقيم (Δ) مواز للشعاع $\overrightarrow{V_0}$. الأشعة $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ ، .... ، $\overrightarrow{V_n}$ التي لها نفس المبدأ O ونهاياتها تنتمي جميعها إلى المستقيم (Δ) تحقق العلاقة : $\overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{V_2} = \ldots = \overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{V_n}$.

لبيان ذلك يكفي أن نلاحظ أن : $\overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{V_n} = \overrightarrow{V_0} \wedge (\overrightarrow{V_1} + \alpha.\overrightarrow{V_0})$ حيث α ينتمي إلى R.



3- **الجداء المختلط :** لتكن ثلاثة أشعة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$. نسمي الجداء المختلط لهذه الأشعة المقدار:

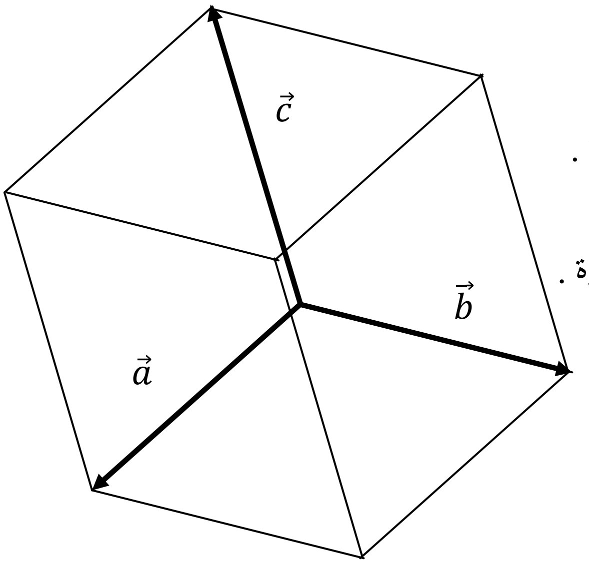
● خواص الجداء المختلط : لا تتغير قيمة الجداء المختلط عند إجراء تبديل للأشعة فيما بينها باستعمال تناوب دائري .



$$\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$$

يكون الجداء المختلط معدوما لما : ● الأشعة الثلاثة تنمي إلى نفس المستوي ● شعاعان متوازيان ● أحد الأشعة معدوما .

● المعنى الهندسي للجداء المختلط : الجداء المختلط $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$ يساوي حجم متوازي السطوح المشكل على الأشعة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$. أي : $V = \left|\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})\right|$.



يكون : $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) > 0$ لما القاعدة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ مباشرة .

و : $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) < 0$ لما القاعدة $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ غير مباشرة .

4- **مضاعف الجداء الشعاعي :** لتكن ثلاثة أشعة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$. نسمي الجداء الشعاعي المضاعف لهذه الأشعة الشعاع : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ والذي يحقق المساواة :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c} = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$$

من المساواة السابقة يمكن أن نستنتج أن : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$.

III- الدوال الشعاعية :

نقول أن $\vec{F}(t)$ هي دالة شعاعية للمتغيرة السلمية t ويتعلق اتجاهها وطويلتها بالمتغيرة t .

مثال : $\vec{F}(t) = F_x(t).\vec{i} + F_y(t).\vec{j} + F_z(t).\vec{k}$

$$= 4\vec{i} + 3t^2\vec{j} + cos2t\,\vec{k}$$

نعرف مشتقة الدالة $\vec{F}(t)$ بالنسبة للمتغيرة t بالدالة الشعاعية $\overrightarrow{F'}(t)$ حيث :

$$\overrightarrow{F'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t+\Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{F}(t)}{dt}$$

لما تكون : $\vec{F}(t) = F_x(t).\vec{i} + F_y(t).\vec{j} + F_z(t).\vec{k}$

فإن : $\overrightarrow{F'}(t) = \frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \frac{dF_x}{dt}.\vec{i} + \frac{dF_y}{dt}.\vec{j} + \frac{dF_z}{dt}.\vec{k} = F'_x(t).\vec{i} + F'_y(t).\vec{j} + F'_z(t).\vec{k}$

- خواص الإشتقاق : لتكن الدالة السلمية $g(t)$ والدوال الشعاعية $\vec{U}(t)$ و $\vec{V}(t)$. لديا :

$$\frac{d}{dt}\left[g(t) \cdot \vec{V}(t)\right] = \frac{dg(t)}{dt}.\vec{V}(t) + g(t).\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{U}(t).\vec{V}(t)\right] = \frac{d\vec{U}(t)}{dt}.\vec{V}(t) + \vec{U}(t).\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{U}(t) \wedge \vec{V}(t)\right] = \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \wedge \vec{V}(t) + \vec{U}(t) \wedge \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

$$\vec{V}(t).\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{1}{2}.\frac{d\left\|\vec{V}(t)\right\|^2}{dt} = \left\|\vec{V}(t)\right\|.\frac{d\left\|\vec{V}(t)\right\|}{dt}$$

● **تكامل الدوال الشعاعية :** لتكن الدالة $\vec{F}(t) = F_x(t).\vec{i} + F_y(t).\vec{j} + F_z(t).\vec{k}$.

تكامل الدالة $\vec{F}(t)$ هو :

$$\int \vec{F}(t).dt = \int F_x(t).\vec{i}.dt + \int F_y(t).\vec{j}.dt + \int F_z(t).\vec{k}.dt$$

وعندما تكون $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ أشعة ثابتة أي لا تتغير بدلالة t فإن التكامل السابق يكتب :

$$\int \vec{F}(t).dt = \vec{i}.\int F_x(t).dt + \vec{j}.\int F_y(t).dt + \vec{k}.\int F_z(t).dt$$

أعمال موجهة

التمرين 01: في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $P(2,1,1)$ و $Q(4,-2,3)$.

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ وأعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q .

2- مثل في المعلم الشعاع $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ المساير لـ $\overrightarrow{PQ}$ و أحسب شعاع واحدته $\vec{\mathrm{U}}$.

3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 ، A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ ، $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz})$ و $(\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz})$.

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_1}$ (**يمكن الاكتفاء بالحالة أ فقط والبقية في المنزل**)

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_3}$

التمرين 02: في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بين أن من أجل الشعاع الكيفي $\vec{A}$ لدينا دائما:

أ- $\vec{A} = (\vec{A}.\vec{i})\vec{i} + (\vec{A}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$

ب- $\vec{A} = \|\vec{A}\|(\mathrm{Cos}\alpha\,\vec{i} + \mathrm{Cos}\beta\,\vec{j} + \mathrm{Cos}\gamma\,\vec{k})$

حيث α ، β و γ هي الزوايا التي يصنعها $\vec{A}$ على التوالي مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (جيوب التمام الموجهة).

ماذا تمثل هذه الجيوب بالنسبة لشعاع الواحدة المرتبط بـ $\vec{A}$.

ج- عندما يكون $\vec{A} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ أحسب α ، β و γ وتأكد من العلاقة :

$cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

التمرين 03: لتكن مجموعة الأشعة : $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$ ، $\vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

1- أحسب طويلة كل شعاع , و أشعة الواحدة المرفقة بها.

2- أحسب $\vec{U} = \vec{A} + \vec{B}$, $\vec{V} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$ و $\vec{W} = \vec{A} - 2\vec{B} + 3\vec{C}$.

التمرين 04 : 1- لدينا الشعاعان $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ و $\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ أحسب طويلة كل منهما.

2- أحسب الجداء السلمي $\vec{A}.\vec{B}$ ثم أستنتج الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$ بينهما.

3- ما هي مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ والمسافة بين A و B. تأكد من العلاقة :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\| \, cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) .$$

بين أن هذه العلاقة تبقى صحيحة في الحالة العامة.

4- عندما تكون $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$ بين أن أقطار المعين المشكل على الأشعة $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدة.

5 - أحسب الجداء الشعاعي $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ ثم أستنتج بطريقة أخرى الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$. ما هو شعاع الواحدة $\vec{U}$ للشعاع $(\vec{A} \wedge \vec{B})$.

6- نعرف الشعاع $\vec{W} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}$ ، أوجد y و x ليكون $\vec{U}$ هو أيضا شعاع واحدة ل $\vec{W}$.

التمرين 05 : يعطى الشعاعان $\vec{V} = -\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$ و $\vec{W} = \alpha\,\vec{i} - \beta\,\vec{j} + x\,\vec{k}$ حيث أن α , β و γ ثوابت . حدد قيمة الوسيط x إن أمكن بدلالة هذه الثوابت حتى يكون :

$\vec{V} \,//\, \vec{W}$ ، $\vec{V} \perp \vec{W}$ ، الزاوية $(\vec{V}, \vec{W})$ تساوي $\pi/4$.

التمرين 06: لتكن الأشعة: $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ، $\vec{B} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{C} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

1- أحسب : $\vec{A}.\vec{B}$ ، $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{B}.\vec{C}$

2- أحسب كذلك : $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ، $\vec{A} \wedge \vec{C}$ و $\vec{B} \wedge \vec{C}$

3- أوجد الزاوية $(\vec{B}, \vec{C})$

4- أحسب مساحة متوازيي الأضلاع المشكلين من الشعاعين $(\vec{A}, \vec{B})$ و $(\vec{B}, \vec{C})$

5- أحسب الجداء المضاعف $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ و $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$. ماذا تستنتج ؟

6- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$ و $(\vec{B} \wedge \vec{C}).\vec{A}$ و $(\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$. ماذا تلاحظ ؟ ماذا يمثل هذا الجداء.

التمرين 07: 1- لتكن مجموعة الأشعة : $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ و $\vec{V}_3 = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. أوجد قيمة الوسيط α إن كان ذلك ممكنا حتى يكون :

$\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{k}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{j}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{i}$ و $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$.

2- أوجد قيمة الوسيطين α و β حتى يكون : $\vec{V}_3 = \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2$

3- أحسب: $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ ، $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).\vec{V}_3$ ، $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ و $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

4- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ و $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_1$ ، ماذا تلاحظ ؟

5- أحسب الجداء المضاعف : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ ، ماذا تلاحظ ؟

التمرين 08: ليكن في الفضاء ذي الثلاث أبعاد ، الشعاع : $\vec{U} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ والنقطة $A\,(2,1,-1)$ والنقطة $B\,(x\,,y\,,z)$.

1- أوجد إ حداثيات النقطة B بحيث يكون :

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

$\overrightarrow{AB} \,//\, \vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

2- أوجد إحداثيات النقطة B حتى يكون الجداء : $\vec{U} \wedge \overrightarrow{AB} \,//\, \vec{k}$ ، $\vec{U} \wedge \overrightarrow{AB} \perp \vec{k}$

التمرين 09: لتكن الدالة الشعاعية : $\overrightarrow{V(t)}$ تابعة للزمن t بحيث تكتب من الشكل :

$$\overrightarrow{V(t)} = V_x(t)\,\vec{i} + V_y(t)\,\vec{j} + V_z(t)\,\vec{k}$$

1- بين في الحالة العامة أن : $d\|\vec{V}\|/dt \neq \|d\vec{V}/dt\|$ ، متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة : $\|\vec{V}\|.d\|\vec{V}\|/dt = \vec{V}.d\vec{V}/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\overrightarrow{V(t)}$

3- إذا كانت $\|\vec{V}\| = Cte$ بين أن $\vec{V}(t) \perp d\vec{V}(t)/dt$

التمرين 10 : لتكن الدالة الشعاعية $\vec{R}(t) = X(t)\vec{\imath} + Y(t)\vec{\jmath} + Z(t)\vec{k}$ في المعلم $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ حيث $X(t)$ ، $Y(t)$ و $Z(t)$ هي دوال للمتغيرة t قابلة للإشتقاق.

1- بين أن: $\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dY(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dZ(t)}{dt}\vec{k}$

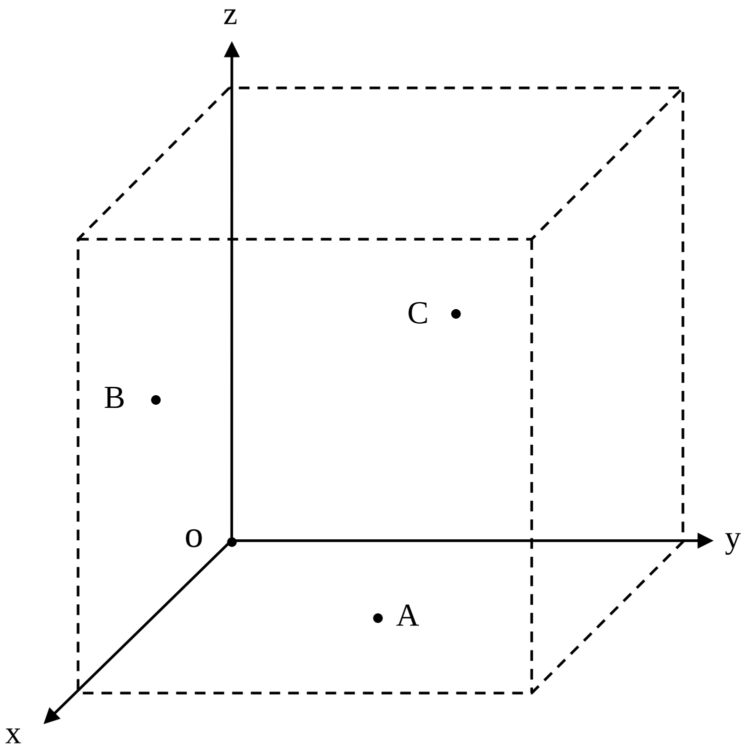
2- عندما تكون $\vec{R}(t) = 3e^{-2t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\,\vec{\jmath} + 2\sin 3t\,\vec{k}$ أحسب $\frac{d\vec{R}}{dt}$ ، $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ وشدتيهما $\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\|$ و $\left\|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right\|$ لما $t = 0$.

3- عندما تكون $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 6t\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 4\sin t\,\vec{k}$ ما هي عبارة $\vec{R}(t)$ إذا كان $\vec{R} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ و $\frac{d\vec{R}}{dt} = -\vec{\imath} - 3\vec{k}$ لما t=0 .

4- بين أن الدالة $\vec{R}(t) = e^{-t}\left(\overrightarrow{C_1}\cos 2t + \overrightarrow{C_2}\sin 2t\right)$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + 2\frac{d\vec{R}}{dt} + 5\vec{R} = \vec{0}$ حيث $\overrightarrow{C_1}$ و $\overrightarrow{C_2}$ شعاعان ثابتان .

التمرين 11 (امتحان قصير): نعتبر مكعب طول ضلعه a مشكل على محاور جملة الإحداثيات الديكارتية (xO ¸ yO ¸ zO). النقاط A ، B و C تمثل مراكز وجوه المكعب المشكلة على محاور جملة الإحداثيات.



1 - اوجد مركبات الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$.

2 - احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج قيمة الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

3 - احسب مساحة متوازي الأضلاع المشكل على الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$. ما هي إحداثيات النقطة الناقصة لتحديد متوازي الأضلاع وأين تقع.

4 - احسب حجم متوازي السطوح المشكل على الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$.

التمرين 12 (امتحان قصير): نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ غير متوازية ولا تنتمي لمستوي واحد .

1 - ما هو حجم متوازي السطوح V المشكل على هذه الأشعة.

2 - نعرف الأشعة : $\overrightarrow{c^*} = \frac{1}{V}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ ، $\overrightarrow{b^*} = \frac{1}{V}\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)$ ، $\overrightarrow{a^*} = \frac{1}{V}\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)$ حيث V هو حجم متوازي السطوح السابق.

أ - أحسب $\vec{a}.\overrightarrow{a^*}$ ، $\vec{b}.\overrightarrow{b^*}$ ، $\vec{c}.\overrightarrow{c^*}$ ثم $\vec{a}.\overrightarrow{b^*}$ ، $\vec{a}.\overrightarrow{c^*}$ ، $\vec{b}.\overrightarrow{c^*}$.

ب - ما هو حجم متوازي السطوح V^* المشكل على الأشعة $\overrightarrow{a^*}$ ، $\overrightarrow{b^*}$ و $\overrightarrow{c^*}$.

بين أن : $V.V^* = 1$. نعطي: $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$

الفصل الثاني: جمل الإحداثيات المشهورة

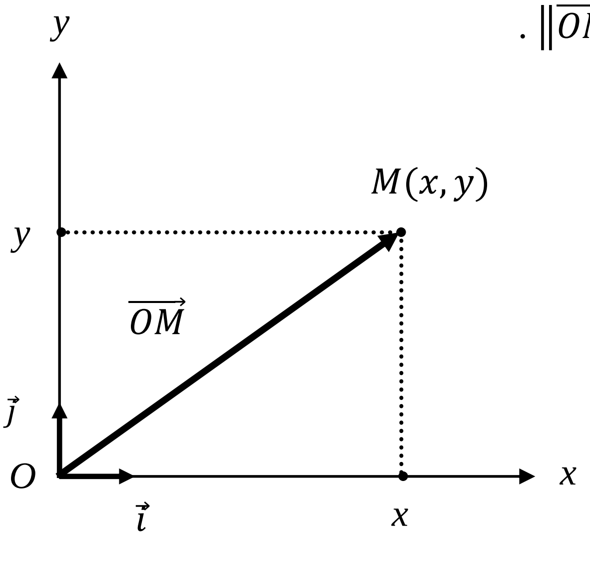
هندسة إقليدس بأبعادها الثلاثة في الفضاء هي الهندسة المناسبة لدراسة المكانيك الكلاسيكي. الفضاء الهندسي الإقليدي محدد بوحدة قياس الطول . لتحديد نقطة من هذا الفضاء يتطلب فقط تعيين ثلاثة معاملات تسمى إحداثيات النقطة. في هذا الفصل نعطي أنظمة الإحداثيات الأكثر استعمالا في ذلك .

I- جمل الإحداثيات في المستوي :

1- جملة الإحداثيات الديكارتية :

في هذه الجملة يحدد موقع أي نقطة M بإحداثيتين (x , y) أو بشعاع الموقع :

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$ مع $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

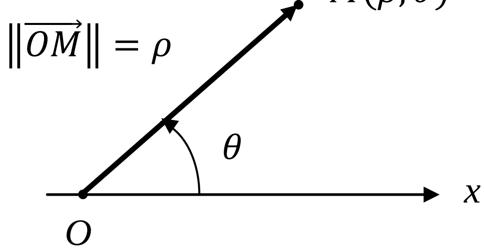


تتميز هذه الجملة بكون أشعة الواحدة $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$

لقاعدة الإسناد $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ المتعامدة المتجانسة ثابتة .

أي :
$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \vec{0}$$

2- جملة الإحداثيات القطبية :



لتعريف هذه الجملة نأخذ نقطة O كمبدأ ومحور $\overrightarrow{Ox}$.

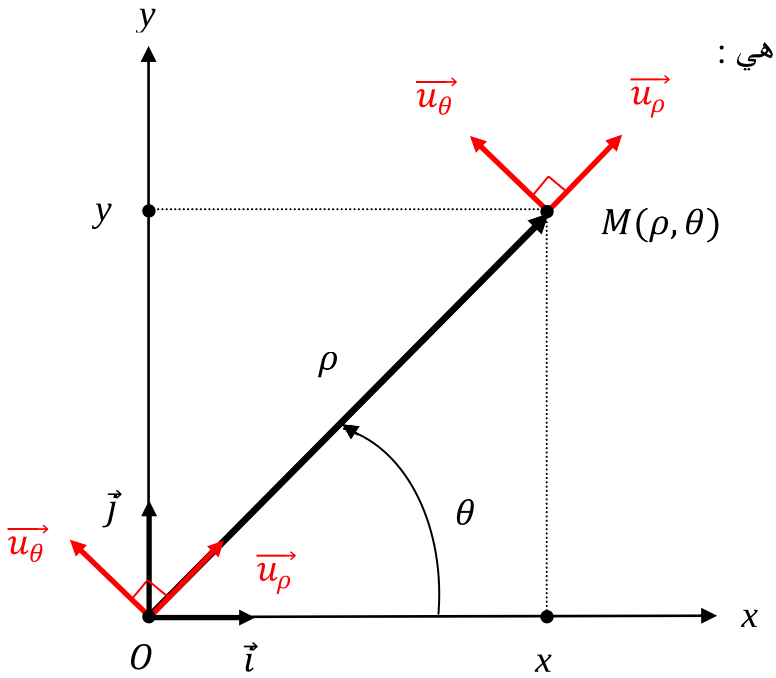
المبدأ O يسمى القطب والمحور $\overrightarrow{Ox}$ المحور القطبي .

أي نقطة M من المستوي يحدد موقعها في هذه الجملة بالمسافة ρ التي تبعد بها عن القطب O

والزاوية θ التي يشكلها الشعاع $\overrightarrow{OM}$ مع المحور $\overrightarrow{Ox}$. إذن : $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$ و $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

لتحديد مواقع جميع نقاط المستوي يجب : $\rho \in [0, \infty[$ و $\theta \in [0, 2k\pi]$.

عند المرور من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية أو العكس نختار المحور القطبي $\overrightarrow{Ox}$ هو نفسه المحور $\overrightarrow{Ox}$ للإحداثيات الديكارتية . علاقات المرور هي :



$x = \rho.cos\theta$ و $y = \rho.sin\theta$

أو : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $tg\theta = \frac{y}{x}$

أشعة الواحدة $\overrightarrow{u_\rho}$ و $\overrightarrow{u_\theta}$ للمعلم القطبي $(O, \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$ تعرف كما يلي :

- $\overrightarrow{u_\rho}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$ ، أي : $\overrightarrow{u_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$. إذن شعاع الموقع في الإحداثيات القطبية يكتب دائما : $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u_\rho}$.

- $\overrightarrow{u_\theta}$ نحصل عليه بدوران $\overrightarrow{u_\rho}$ بزاوية $\frac{\pi}{2}$ في اتجاه دوران الزاوية θ (أنظر الشكل) .

الشعاع $\overrightarrow{u_\rho}$ في الإحداثيات الديكارتية يكتب : $\overrightarrow{u_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho} = \frac{x.\vec{i}+y.\vec{j}}{\rho} = \frac{\rho.cos\theta\ .\vec{i}+\rho.sin\theta\ .\vec{j}}{\rho}$

أي : $\boldsymbol{\overrightarrow{u_\rho} = cos\theta.\vec{\imath} + sn\theta.\vec{\jmath}}$ أو $\overrightarrow{u_\rho}\begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix}$. وبما أن $\overrightarrow{u_\theta}$ هو $\overrightarrow{u_\rho}$ بدوران $\frac{\pi}{2}$ فإنه يكتب:

$$\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_\rho}\left(\theta = \theta + {}^{\pi}/_{2}\right) = cos\left(\theta + {}^{\pi}/_{2}\right).\vec{\imath} + sin\left(\theta + {}^{\pi}/_{2}\right).\vec{\jmath}$$

إذن: $\boldsymbol{\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta.\vec{\imath} + cos\theta.\vec{\jmath}}$ أو $\overrightarrow{u_\theta}\begin{pmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}$.

يمكن أن نتأكد بسهولة أن : $\overrightarrow{u_\rho}.\overrightarrow{u_\theta} = 0$ أي : $\overrightarrow{u_\rho} \perp \overrightarrow{u_\theta}$.

يتميز المعلم القطبي $(O, \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$ بكون أشعة الواحدة $\overrightarrow{u_\rho}$ و $\overrightarrow{u_\theta}$ غير ثابتة ، فعندما تنتقل النقطة M من موقع إلى موقع أخر فإن الزاوية θ تتغير ويتغير معها اتجاهي $\overrightarrow{u_\rho}$ و $\overrightarrow{u_\theta}$. ونتيجة لذلك فإن مشتقات $\overrightarrow{u_\rho}$ و $\overrightarrow{u_\theta}$ ليست معدومة. عندما نشتق بالنسبة للمتغيرة t لدينا:

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$ مع $$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -sin\theta.\vec{\imath} + cos\theta.\vec{\jmath} = \overrightarrow{u_\theta}$$. إذن: $$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\overrightarrow{u_\theta}$$

.

عندما تمثل المتغيرة t الزمن فإننا نكتب عادة : $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ ، أي : $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$

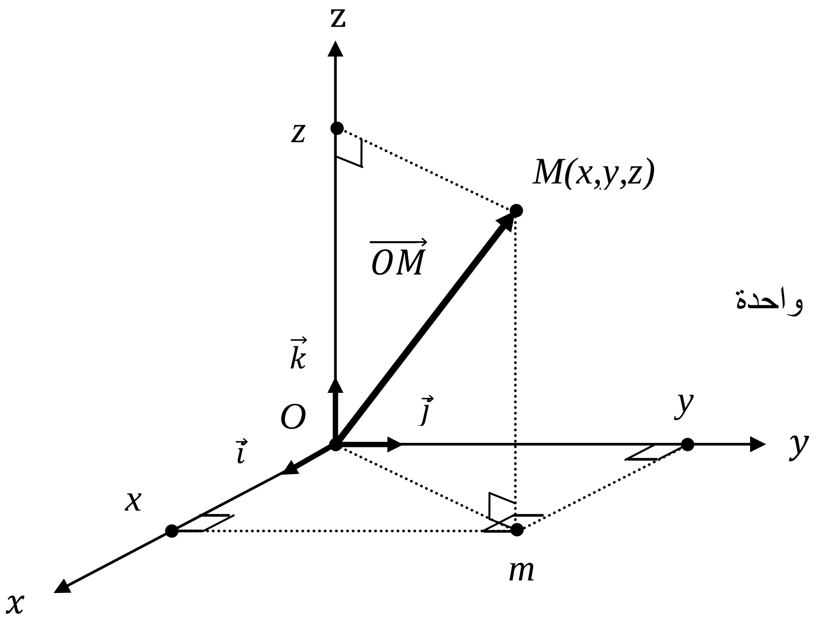
وبنفس الطريقة نجد : $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.\overrightarrow{u_\rho} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\rho}$.

II- جمل الإحداثيات في الفضاء :

1- **جملة الإحداثيات الديكارتية :** في هذه الجملة يسند الفضاء ثلاثة محاور $\overrightarrow{Ox}$ ، $\overrightarrow{Oy}$ ، $\overrightarrow{Oz}$ متعامدة. نقطة التقاطع O تمثل المبدأ لمعلم متعامد متجانس $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حيث $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ هي أشعة الواحدة للقاعدة .في هذا المعلم أي نقطة M من الفضاء محددة بالإحداثيات (x, y, z) أو بشعاع الموقع :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. تغطية كل الفضاء يتطلب : $x \in]-\infty, +\infty[$ ، $y \in]-\infty, +\infty[$ ،

. $z \in]-\infty, +\infty[$



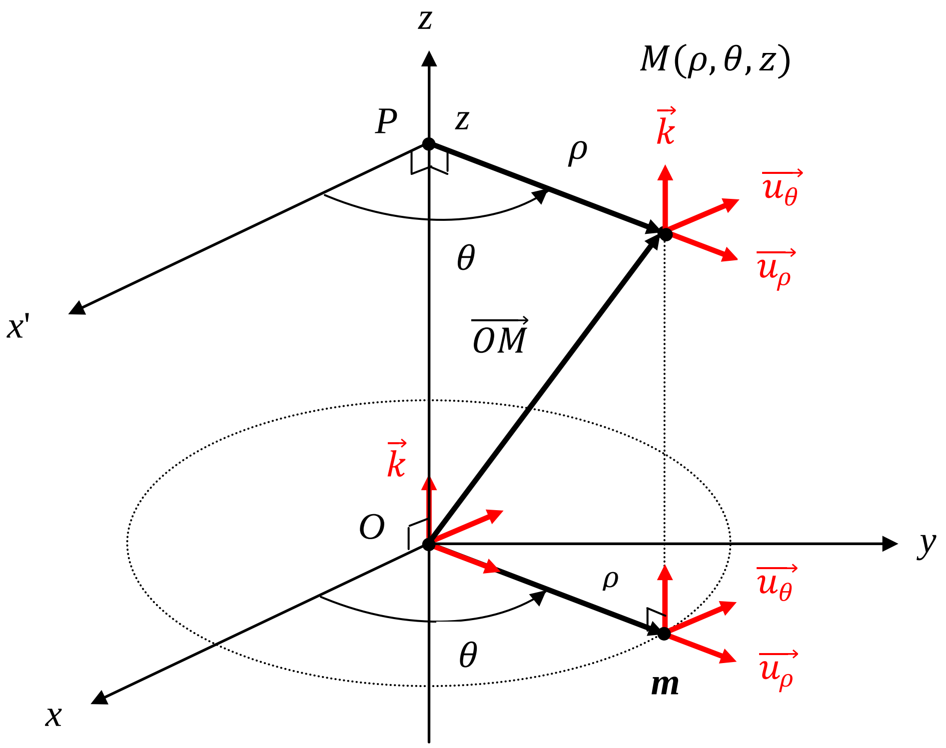
لكل: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ نقطة M واحدة

عادة ، تستعمل جملة الإحداثيات الديكارتية عندما تكون المشكلة المدروسة ليست لها تناظر .

2- **جملة الإحداثيات الأسطوانية :** توجد مسائل فيزيائية كثيرة تظهر اتجاه تناظر مفضل أو بعبارة أخرى تملك محور تناظر مثل حركة دوران وانسحاب حول محور . في مثل هذه الحالة ومن أجل تسهيل الحسابات نفضل أن نأخذ بعين الاعتبار هذا التناظر ونستعمل ما يسمى بجملة الإحداثيات الأسطوانية نسبة إلى الأسطوانة التي تملك محور تناظر نسميه $\overrightarrow{Oz}$. تعرف جملة الإحداثيات الأسطوانية كما يلي :

في المستوي القطبي (المعرف بالإحداثيات القطبية) العمودي على محور التناظر $\overrightarrow{Oz}$ ، نختار محور $\overrightarrow{Ox}$ (عادة المحور القطبي) واتجاه دوران حول $\overrightarrow{Oz}$ (نأخذ عادة الاتجاه الموجب) . للإيضاح، الشكل يعطي زيادة على المحور $\overrightarrow{Ox}$ ، المحور $\overrightarrow{Oy}$ في المستوي القطبي العمودي على $\overrightarrow{Oz}$. أي نقطة M من الفضاء يمكن تحديدها في هذه الجملة بالإحداثيات (ρ, θ, z) كما يلي :

• ρ تمثل بعد النقطة M عن المحور $\overrightarrow{Oz}$. إذا كانت النقطة $\boldsymbol{m}$ هي إسقاط M على المستوي القطبي فإن : $\rho = \|\overrightarrow{O\boldsymbol{m}}\|$. وعندما نأخذ النقطة P هي إسقاط M على المحور $\overrightarrow{Oz}$ لدينا أيضا : $\rho = PM$.



• الزاوية θ هي الزاوية $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\boldsymbol{m}})$ أي زاوية الدوران حول المحور $\overrightarrow{Oz}$ انطلاقا من المحور $\overrightarrow{Ox}$ في المستوي القطبي إلى أن نصل إلى $\overrightarrow{O\boldsymbol{m}}$. عندما نأخذ المحور $\overrightarrow{Px'}$ الموازي للمحور $\overrightarrow{Ox}$ لدينا أيضا: $\theta = (\overrightarrow{Px'}, \overrightarrow{PM})$ لأن المستويين $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\boldsymbol{m}})$ و $(\overrightarrow{Px'}, \overrightarrow{PM})$ متوازيان .

• z هي ارتفاع M عن المستوي القطبي أي : $z = \overline{OP}$ أو $z = \overline{\boldsymbol{m}M}$.

يمكن تغطية كل الفضاء ومرة واحدة بجعل هذه الإحداثيات تتغير في المجالات : $\rho \in [0, +\infty[$ و $\theta \in [0,2\pi]$ و $z \in]-\infty, +\infty[$.

تنبيه : كل مجموعة قيم (ρ,θ,z) للإحداثيات توافق نقطة واحدة من الفضاء ولكن العكس غير صحيح لأن الزاوية θ للمحور $\overrightarrow{Oz}$ غير معرفة . فكل نقطة M تنتمي إلى المحور $\overrightarrow{Oz}$ تملك الإحداثيات $(0,\theta_{\text{غير معرفة}},z)$.

يمكن المرور من جملة الإحداثيات الأسطوانية إلى الديكارتية أو العكس باستعمال العلاقات التالية :

$$x=\rho.cos\theta \quad ، \quad y=\rho.sin\theta \quad ، \quad z=z$$

أو $$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad ، \quad tg\theta=\frac{y}{x} \quad ، \quad z=z$$

في جملة الإحداثيات الأسطوانية أشعة الواحدة للقاعدة المتعامدة المتجانسة $(O,\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta},\vec{k})$ معرفة كما يلي :

- $\overrightarrow{u_\rho}$ هو شعاع الواحدة القطري للشعاع $\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}$ أو $\overrightarrow{PM}$: $\overrightarrow{u_\rho}=\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}\|}=\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}}{\rho}$
- $\overrightarrow{u_\theta}$ هو شعاع الواحدة العمودي على $\overrightarrow{u_\rho}$ في المستوي القطبي (كما هو في الإحداثيات القطبية)

  أي $\overrightarrow{u_\rho}\perp\overrightarrow{u_\theta}$ وينتميان إلى المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ العمودي على $\overrightarrow{Oz}$.
- $\vec{k}$ هو شعاع الواحدة لمحور التناظر $\overrightarrow{Oz}$ العمودي على $\overrightarrow{u_\rho}$ و $\overrightarrow{u_\theta}$ ويشكل معهما القاعدة المباشرة $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta},\vec{k})$. $\vec{k}$ هو شعاع ثابت .

شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ يكتب : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{\boldsymbol{Om}}+\overrightarrow{\boldsymbol{m}M}=\rho.\overrightarrow{u_\rho}+z.\vec{k}$.

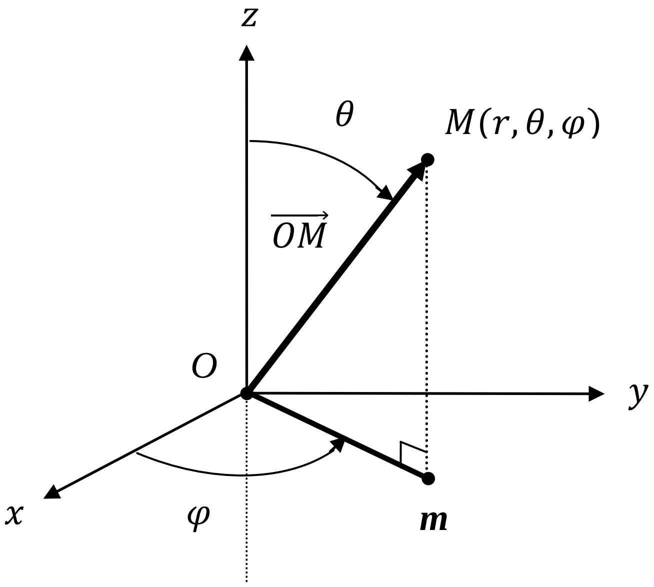
في الإحداثيات الديكارتية لدينا : $\overrightarrow{u_\rho}=cos\theta.\vec{\imath}+sin\theta.\vec{\jmath}$ ، $\overrightarrow{u_\theta}=-sin\theta.\vec{\imath}+cos\theta.\vec{\jmath}$ و $\vec{k}=\vec{k}$. مشتقات أشعة الواحدة بالنسبة للزمن t والزاوية θ هي :

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{d\theta}=\vec{0} \ \text{،}\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}=-\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\rho} \ \text{،}\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}=-\overrightarrow{u_\rho} \ \text{،}\ \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}=\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} \ \text{،}\ \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}=\overrightarrow{u_\theta}$$

3- جملة الإحداثيات الكروية : عند دراسة ظواهر فيزيائية تتعلق فقط بالبعد عن نقطة ثابتة O (O تمثل مركز تناظر المشكلة) يفضل في هذه الحالة استعمال جملة إحداثيات مبدأها O تسمى جملة الإحداثيات الكروية . الإحداثيات الكروية لنقطة M هي (r,θ,φ) المعرفة كالتالي :

- r تمثل بعد M عن المركز O : $\|\overrightarrow{OM}\|=r$
- $\theta=(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM})$
- $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{O\boldsymbol{m}})$

$\boldsymbol{m}$ هو مسقط النقطة M على المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ العمودي على $\overrightarrow{Oz}$.



المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz})$ هو المرجع في تحديد الزاوية φ . فأي نقطة تنتمي لهذا المستوي لها $\varphi=0$.

لتغطية كل الفضاء ومرة واحدة ، أي كل نقطة M من الفضاء تحدد بإحداثيات (r,θ,φ) واحدة ، يجب أخذ هذه الإحداثيات في المجالات التالية :

$$r\in[0,+\infty[\quad \text{،} \quad \theta\in[0,\pi] \quad \text{،} \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

تنبيه: النقاط التي توجد على المحور $\overrightarrow{Oz}$ لها الإحداثية φ غير معرفة .

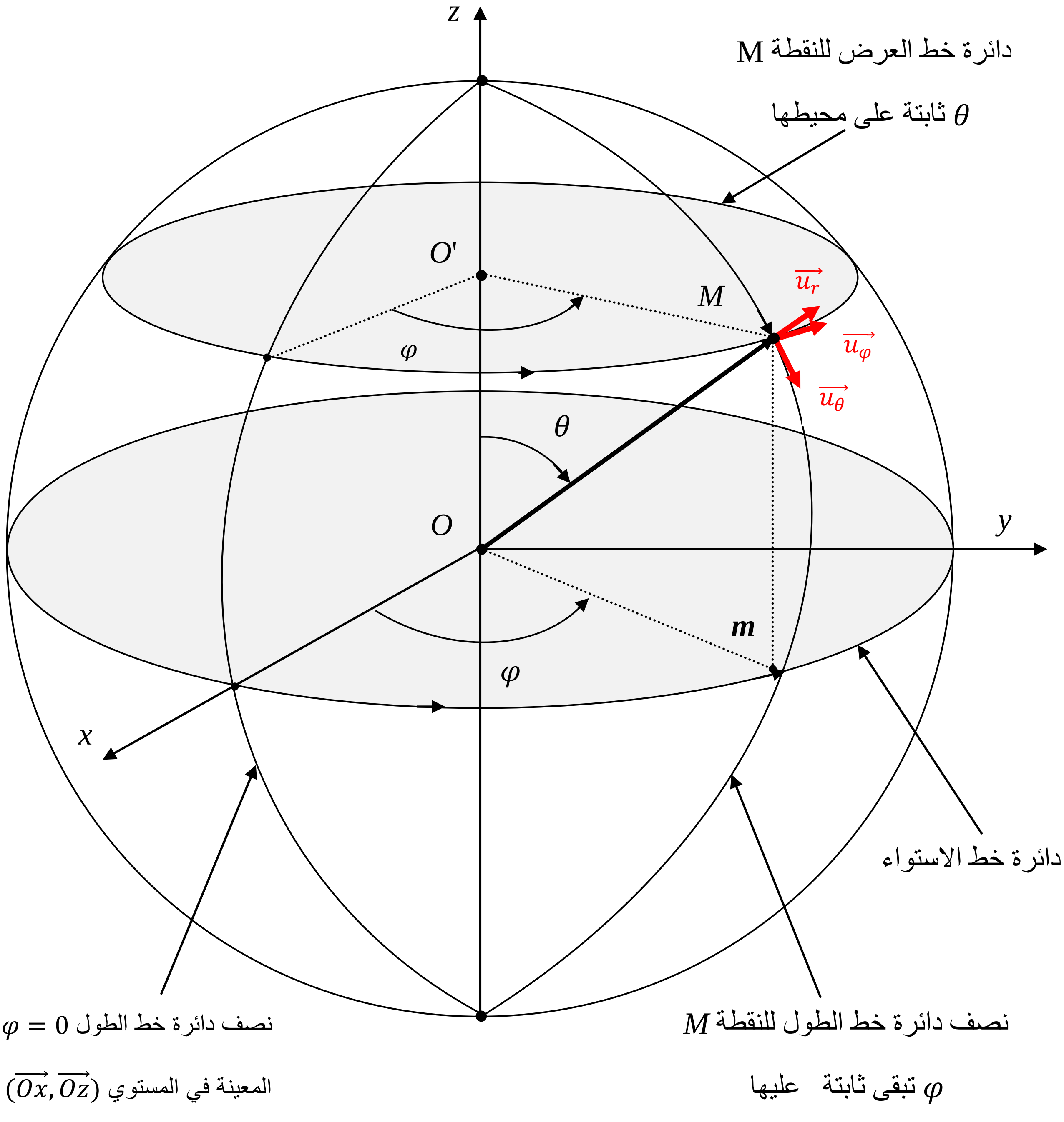
علاقات المرور من الإحداثيات الكروية إلى الديكارتية هي :

$$x = r.\cos\varphi.\sin\theta \quad ، \quad y = r.\sin\varphi.\sin\theta \quad ، \quad z = r.\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ، \quad tg\varphi = {}^{y}/_{x} \quad ، \quad tg\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

توجد طريقة أخرى لتعريف الإحداثيات الكروية بكيفية أوضح (أنظر الشكل) كما يلي :

- نحدد المبدأ O ثم نرسم كرة مركزها O ونصف قطرها r الذي يساوي بعد النقطة M عن المركز.



- نضع النقطة M على سطح الكرة في موقعها المحدد.

- الزاويتان θ و φ يحددان برسم خطوط الطول و العرض للنقطة M. الزاوية θ نحصل عليها بالدوران على دائرة خط الطول انطلاقا من نقطة تقاطع جهة $\overrightarrow{Oz}$ الموجبة مع الكرة إلى نصل إلى M . الزاوية φ نحصل عليها بالدوران على دائرة خط العرض انطلاقا من نصف دائرة خط الطول $\varphi = 0$ إلى أن نصل إلى النقطة M .

تعرف قاعدة الإحداثيات الكروية $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ المتعامدة المتجانسة كما يلي :

- $\overrightarrow{u_r}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$ ، أي : $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$. ولذلك فإن شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكروية يكتب دائما : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r.\overrightarrow{u_r}$.

- $\overrightarrow{u_\theta}$ نحصل عليه بدوران $\overrightarrow{u_r}$ بزاوية $\frac{\pi}{2}$ في مستوي نصف دائرة خط الطول للنقطة M وفي اتجاه تزايد θ . $\overrightarrow{u_\theta}$ ناظمي على $\overrightarrow{u_r}$ ومماسي لدائرة خط الطول في M وينتمي إلى مستواها .

- $\overrightarrow{u_\varphi}$ هو شعاع الواحدة الذي يكمل القاعدة $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ بحيث تكون مباشرة : $\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$. $\overrightarrow{u_\varphi}$ هو إذن مماسي لدائرة خط العرض في M ويوجدان في نفس المستوي. مركز دائرة خط العرض هو O' ونصف قطرها يساوي $r.sin\theta$ والمحور $\overrightarrow{Oz}$ عمودي عليها.

العلاقات التي تربط القاعدة $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ بالقاعدة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ هي :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \frac{x.\vec{\imath}+y.\vec{\jmath}+z.\vec{k}}{r} = \frac{r.cos\varphi\ .sin\theta\ .\vec{\imath}+r.sin\varphi\ .sin\theta\ .\vec{\jmath}+r.cos\theta\ .\vec{r}}{r}$$

إذن : $\overrightarrow{u_r} = cos\varphi.sin\theta.\vec{\imath} + sin\varphi.sin\theta.\vec{\jmath} + cos\theta.\vec{k}$

لدينا: $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_r}(\theta = \theta + \frac{\pi}{2})$ ونجد :

$$\overrightarrow{u_\theta} = cos\varphi.cos\theta.\vec{\imath} + sin\varphi.cos\theta.\vec{\jmath} - sin\theta.\vec{k}$$

و : $$\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = -sin\varphi.\vec{\imath} + cos\varphi.\vec{\jmath}$$

مشتقات أشعة الواحدة :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \left(\dot{\theta}.cos\varphi.cos\theta - \dot{\varphi}.sin\varphi.sin\theta\right).\vec{\imath} + \left(\dot{\theta}.sin\varphi.cos\theta + \dot{\varphi}.cos\varphi.sin\theta\right).\vec{\jmath}$$
$$- \dot{\theta}.sin\theta.\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\left(cos\varphi.cos\theta.\vec{\imath} + sin\varphi.cos\theta.\theta\vec{\jmath} - sin\theta.\vec{k}\right)$$
$$+\dot{\varphi}(-sin\varphi.sin\theta.\vec{\imath} + cos\varphi.sin\theta.\vec{\jmath})$$

$$\boldsymbol{\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}.sin\theta.\overrightarrow{u_\varphi}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \left(-\dot{\theta}.sin\theta.cos\varphi - \dot{\varphi}.cos\theta.sin\varphi\right).\vec{\imath}$$
$$+ \left(-\dot{\theta}.sin\varphi.sin\theta + \dot{\varphi}.cos\varphi.cos\theta\right).\vec{\jmath} - \dot{\theta}.cos\theta.\vec{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\left(sin\theta.cos\varphi.\vec{\imath} + sin\theta.sin\varphi.\vec{\jmath} + cos\theta.\vec{k}\right)$$
$$+ \dot{\varphi}(-cos\theta.sin\varphi.\vec{\imath} + cos\theta.cos\varphi.\vec{\jmath})$$

$$\boldsymbol{\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u_r} + \dot{\varphi}.cos\theta.\overrightarrow{u_\varphi}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}(cos\varphi.\vec{\imath} + sin\varphi.\vec{\jmath}) = -\dot{\varphi}(sin\theta.\overrightarrow{u_r} + cos\theta.\overrightarrow{u_\theta})}$$

III- الطول العنصري ، المساحة العنصرية ، الحجم العنصري :

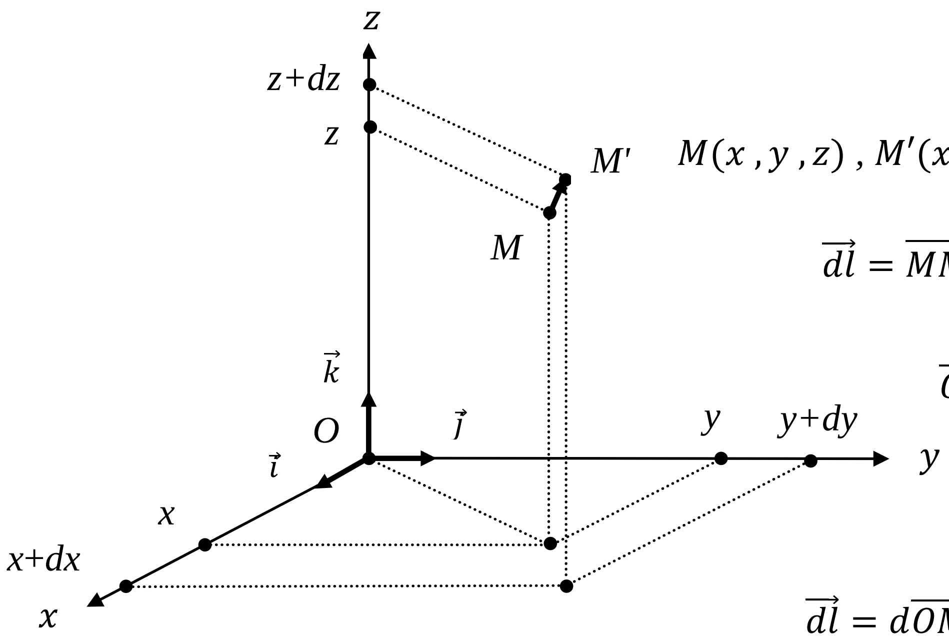
- نسمي الطول العنصري ، طول الانتقال اللامنتهي في الصغر $\overrightarrow{dl}$ الذي تنتقل فيه نقطة من M إلى M' بحيث $\overrightarrow{MM'} \longrightarrow \vec{0}$ ونكتب :

$$\overrightarrow{dl} = \lim_{M \to M'} \overrightarrow{MM'} = \lim_{M \to M'} (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}) = d\overrightarrow{OM}$$

- نسمي المساحة العنصرية dS ، المساحة اللامنتهية في الصغر المرسومة على انتقالين عنصريين .

- نسمي الحجم العنصري dV الحجم المشكل على ثلاثة انتقالات عنصرية .

1- في الإحداثيات الديكارتية :



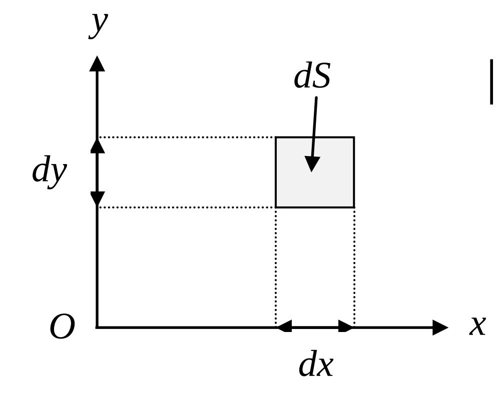
$M(x\,,y\,,z)\,,\, M'(x+dx\,,y+dy\,,z+dz)$

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

يمكن الحصول على $\overrightarrow{dl}$ من $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$



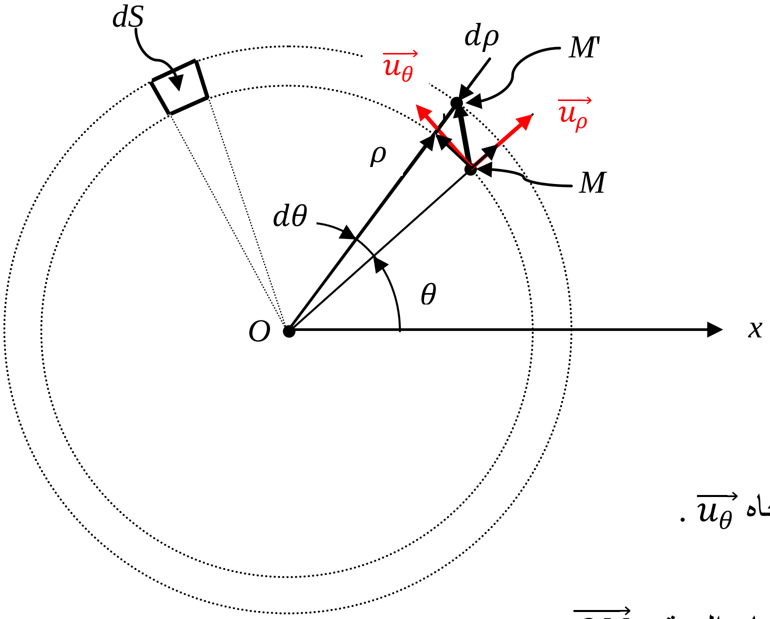
لأن : $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$. $\|\overrightarrow{dl}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ المساحة العنصرية : $dS = dx.dy$

في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$ المساحة العنصرية : $dS = dx.dz$

في المستوي $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ المساحة العنصرية : $dS = dy.dz$

الحجم العنصري هو الحجم المشكل على dx و dy و dz : $dV = dx.dy.dz$.



2- في الإحداثيات القطبية :

$M(\rho,\theta)$ ، $M'(\rho+d\rho,\theta+d\theta)$

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$$

لأن طول القوس المشكل على الزاوية $d\theta$

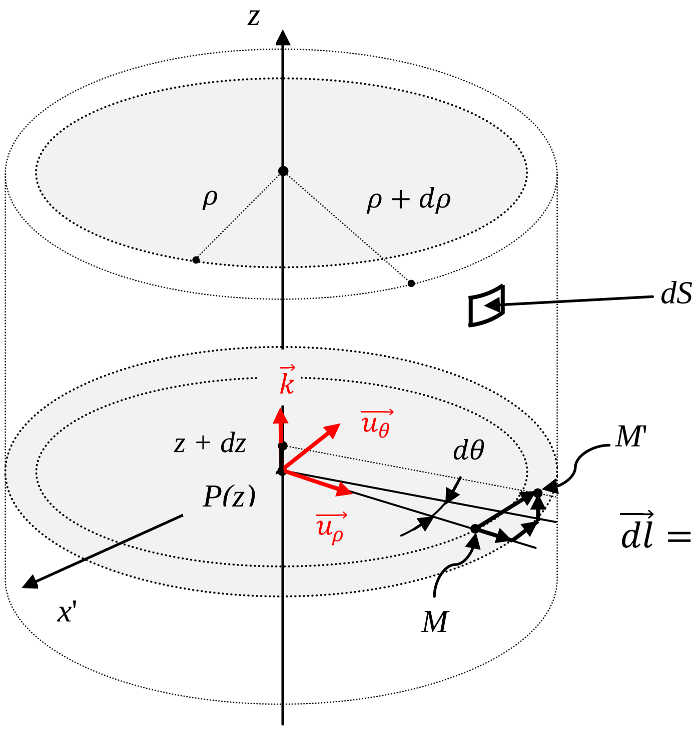
هو $\rho.d\theta$ والشعاع المرافق له هو في الاتجاه $\overrightarrow{u_\theta}$.

يمكن الحصول على عبارة $\vec{d}$ من عبارة شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u_\rho} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$$

لأننا رأينا أن : $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta}$ أي : $d\overrightarrow{u_\rho} = d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$. $\|\overrightarrow{dl}\| = \sqrt{d\rho^2 + (\rho.d\theta)^2}$

المساحة العنصرية dS هي المساة المشكلة على $d\rho$ و $\rho.d\theta$ إذن : $dS = \rho.d\rho.d\theta$.



2- في جملة الإحداثيات الاسطوانية :

شعاع الانتقال من $M(\rho,\theta,z)$ إلى

$M'(\rho+d\rho,\theta+d\theta,z+dz)$

يكتب باستعمال علاقة شال :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\vec{k}$$

ونحصل على نفس العبارة انطلاقا من تفاضل شعاع الموقع : $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u_\rho} + z.\vec{k}$.

$$\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\overrightarrow{u_\rho} + dz.\vec{k} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\vec{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{dl}\right\| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

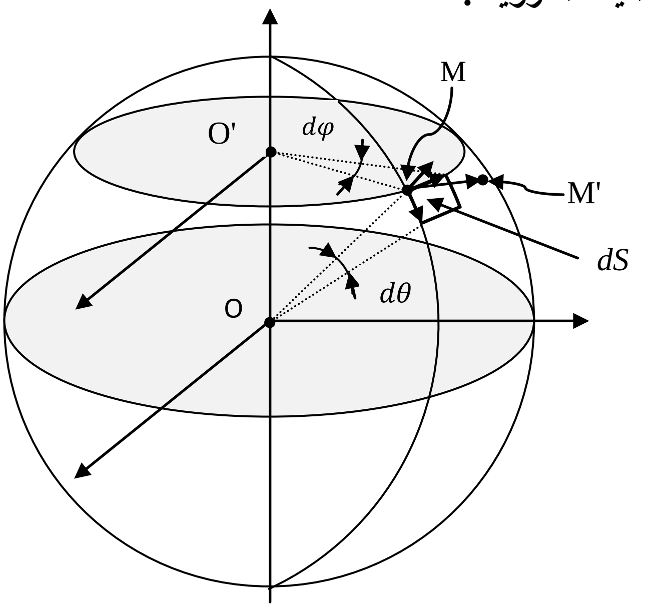
المساحة العنصرية المعتبرة عادة هي المساحة المأخوذة على السطح الجانبي للأسطوانة أي على الانتقالين العنصريين $\rho.d\theta$ و dz ونكتب : $dS = \rho.d\theta.dz$.

الحجم العنصري هو : $dV = d\rho \times \rho.d\theta \times dz = \rho.d\rho.d\theta.dz$

4- في جملة الإحداثيات الكروية :

$OM = r$

$O'M = r.sin\theta$



شعاع الانتقال العنصري من $M(r,\theta,\varphi)$ إلى $M'(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi)$ هو :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r.sin\theta.d\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$$

المساحة العنصرية على سطح الكرة التي لها نصف القطر r هي : $dS = r^2.sin\theta.d\theta.d\varphi$ والحجم العنصري المشكل على الانتقالات العنصرية الثلاثة لـ $\overrightarrow{dl}$ هو: $dV = r^2.sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$

أعمال موجهة

التمرين 1: 1- مثل في المعلم الديكارتي $(O,\vec{i},\vec{j})$ الشعاع $\vec{V_1}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ عند نقطة التأثير $M_1(2{,}1)$ ،

والشعاع $\vec{V_2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ عند نقطة التأثير $M_2(3{,}4)$.

2- ا- مثل في المعلم القطبي $\left(O,\overrightarrow{U_\rho},\overrightarrow{U_\theta}\right)$ النقطتين $M_1(2,{}^{\pi}/_{3})$ و $M_2(3,{}^{\pi}/_{2})$ ، ثم مثل في كل نقطة أشعة الواحدة $(\overrightarrow{U_\rho},\overrightarrow{U_\theta})$.

ب- من أجل نقطة التأثيرالسابقة M_1 ، مثل الشعاع : $\vec{V}=-2\overrightarrow{U_\rho}+3\overrightarrow{U_\theta}$.

ج- من أجل النقطة السابقة M_2 ، أعط مركبات أشعة الواحدة $\overrightarrow{U_{\rho 2}}$ و $\overrightarrow{U_{\theta 2}}$ في المعلم الديكارتي.

التمرين 2: في المستوي القطبي $\left(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta\right)$ ، نعتبر مجموعة النقاط المحددة بالإحداثيات $M(4,\theta)$. مثل المنحنى الذي ترسمه M لما تتغير θ في المجال $[0,2\pi]$. مثل الأشعة التالية في النقاط $M_i(4,\theta_i)$ المرافقة: - $\vec{V}_1=3\vec{u}_\theta$ في $M_1(4{,}0)$ - $\vec{V}_2=-2\vec{u}_\rho+\vec{u}_\theta$ في $M_2(4,{}^{\pi}/_{4})$
- $\vec{V}_3=-4\vec{u}_\rho$ في $M_3(4,{}^{\pi}/_{2})$ - $\vec{V}_4=-2\vec{u}_\rho-\vec{u}_\theta$ في $M_4(4,5{}^{\pi}/_{4})$.

احسب ومثل في $M(4,\theta)$ المشتقات الأولى والثانية للشعاع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزاوية θ .

التمرين 3: تتغير الإحداثية القطبية ρ لنقطة M بدلالة الزاوية θ وفقا للمعادلة: $\rho=\frac{2}{\pi^2}\theta^2+3$.

1- مثل على المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$ المنحنى الذي ترسمه M لما : $\theta\in[0,3\pi]$.

2- حدد على المنحنى النقطة P المعرفة بالإحداثية $\theta={}^{9\pi}/_{4}$ ومثل عندها الشعاع:

$\vec{V}=3\vec{u}_\rho-2\vec{u}_\theta$. ما هي مركبات $\vec{V}$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3- احسب الشعاعين $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ و $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$ ومثلهما على المنحنى لما: $\theta=0$ ، $\theta=\pi$ ، $\theta=2\pi$.

التمرين 4: في جملة الإحداثيات الأسطوانية ترسم نقطة M منحنى (C) معرف بالإحداثيات:

$\left(\rho=R\ ,\ \theta\ ,\ z=\frac{\theta}{a}\right)$ حيث R و a ثوابت موجبة.

1- أرسم المنحنى (C) لما: $R=4$ ، $0\le\theta\le4\pi$ ، $a=\pi$.

2- هل النقطة $P(2,2,2)$ المعينة في الإحداثيات الديكارتية تنتمي إلى (C) ؟ ما هي إحداثياتها الأسطوانية.

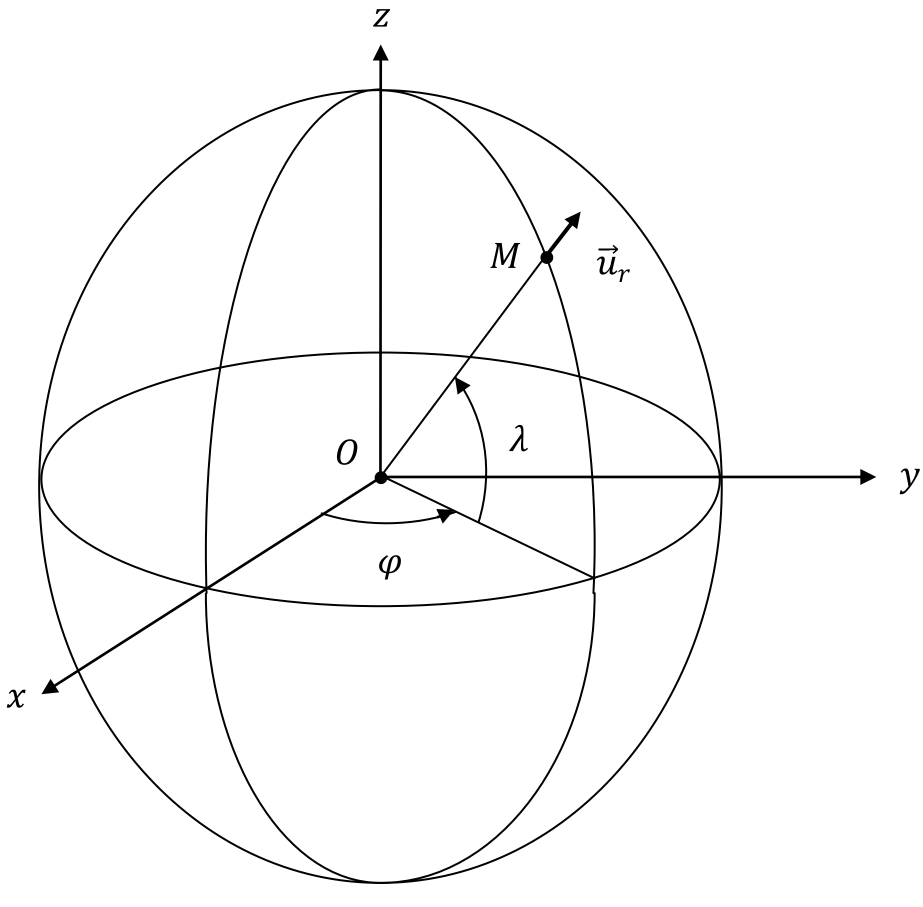
3- احسب $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ و $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$ ومثلهما على المنحنى لما: $\theta = 0$ ، $\theta = {}^{\pi}/_{2}$.

التمرين 5: : نعتبر الأرض كرة نصف قطرها $R=6370\ Km$. يحدد موقع نقطة M فوق سطح الأرض باستعمال الإحداثيات الجغرافية λ (زاوية خط العرض) و φ (زاوية خط الطول).

1- أكتب عبارة شعاع الواحدة $\overrightarrow{\mathrm{U_r}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{R}$ للإحداثيات الكروية في المعلم $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$.

2- إذا كانت الإحداثيات الجغرافية لمدينة قسنطينة المعرفة بالنقطة M_1 هي $\lambda_1 = 36 \cdot 35°$ و $\varphi_1 = 6 \cdot 60°$ والإحداثيات الجغرافية لمدينة تمنراست المعرفة بالنقطة M_2 هي $\lambda_2 = 22 \cdot 79°$ و $\varphi_2 = 5 \cdot 52°$ ، استنتج الإحداثيات الكروية للمدينتين ثم أحسب الزاوية $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.

3- استنتج المسافة الأقصر بين المدينتين في النموذج الكروي للأرض. قارن المسافة المحسوبة مع المسافة $d = 1800\ Km$ المعطاة في الدليل الخاص بشبكة الطرقات.



الفصل الثالث: حركة النقطة المادية

مدخل: حركة النقطة المادية هي دراسة حركة الأجسام من دون التعرض إلى الأسباب التي أدت إليها أو بعبارة أخرى تبحث في وصف الحركات دون تفسيرها. فهي نظرية رياضية تستعمل مفاهيم الفضاء والزمن بمعناهما الفيزيائي.

وصف حركة نقطة مادية يتطلب الجواب على سؤالين :

- **ما هو مسار الجسم المتحرك ؟** تحديده يستدعي معرفة موقع الجسم المتحرك في كل لحظة.
- **كيف يتحرك الجسم على هذا المسار؟** تحديد شعاع السرعة وشعاع التسارع يجيب على ذلك.

يهدف هذا الفصل إلى تعريف المفاهيم الأساسية التالية: **شعاع الموقع، المسار، شعاع السرعة** و**شعاع التسارع** لنقطة مادية تتحرك في مرجع معين ثم الحصول على عبارات شعاعي السرعة والتسارع في أنظمة **الإحداثيات المشهورة**. في النهاية سندرس حركات معينة ومنها **الحركة ذات تسارع مركزي**.

هذا الفصل يتطلب التمكن من:

- استعمال جمل الإحداثيات التي رأيناها في الفصل السابق.
- الحساب الشعاعي والإشتقاق والتكامل للدوال الشعاعية.

نذكر هنا بالعلاقة التالية : المشتقة بالنسبة للمتغيرة t للدالة المركبة $F[u(t)]$ هي :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du} \times \frac{du}{dt}$$

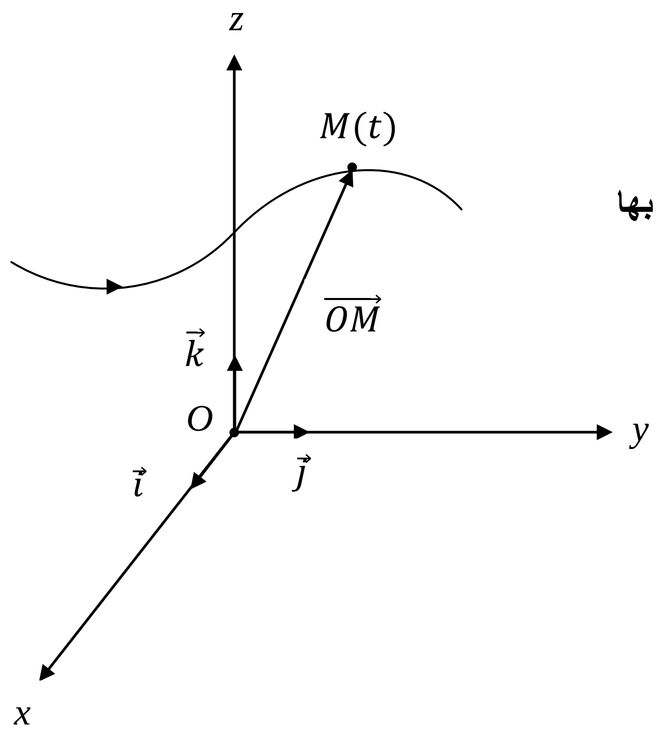
I - مفاهيم عامة

1 - **الفضاء الفيزيائي:** يوافق فضاء إقليدس (*Euclide*) بأبعاده الثلاثة والذي يمكن أن نحدد فيه مواقع نقاط باستعمال جمل الإحداثيات المعروفة. المبدأ الذي تقوم عليه هندسة إقليدس هو اعتبار المسافة الأقرب بين نقطتين في الفضاء هي الخط المستقيم.

2 - **الزمن:** هو معامل حقيقي يستعمل لجعل تأريخ للأحداث والوقائع. كل جهاز يستعمل لذلك يسمى ساعة (*Horloge*). لقياس الزمن، تستعمل الساعة ظاهرة متناوبة مثل الاهتزازات الميكانيكية لذراع بندول (*pendule*) أو الاهتزازات الكهربائية لبلورة الكوارتز (*quartz*). متطلبات الدقة لقياس الزمن أدت إلى استعمال ظواهر اهتزازية مصدرها الفيزياء الذرية والساعات التي نتجت عن ذلك يمكنها أن

تقيس الزمن بدقة في حدود 10^{-14} أي بخطأ واحد ثانية لكل ثلاثة ملايين سنة. تسمح الساعة بإرفاق زمن t لكل مواقع جسم متحرك على طول مساره.

3 - **المرجع:** حركة جسم تحدد دائما بالنسبة لجسم آخر يسمى المرجع. هذا المرجع نختاره كمبدأ O لجملة الإحداثيات التي ندرس فيها الحركة. يحدد موقع الجسم المتحرك M في هذه الجملة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي يسمى شعاع الموقع وذلك بتعيين مركباته.



" نسمي المرجع جملة إحداثيات مقيدة بمشاهد لديه ساعة يسجل بها الزمن t."

يجب التأكيد هنا على نسبية الحركة للجسم المتحرك، لأن مشاهدان يوجدان في مرجعين يتحركان بالنسبة لبعضهما البعض يصفان حركة الجسم بصورة مختلفة. فالجسم الذي يسقط شاقوليا داخل عربة للقطار بالنسبة لمشاهد يوجد داخل العربة، يرسم قطعا مكافئا بالنسبة لمشاهد يوجد على الرصيف.

4 - **الزمن المطلق:** نعتبر أن للزمن مفهوما مطلقا لا يتعلق بالمرجع، أي أن مشاهدين يوجدان في مرجعين مختلفين يسجلان نفس الزمن لنفس الوقائع.

5 - **النقطة المادية:** هي نقطة هندسية من نظام فيزيائي أبعاده مهملة بالنسبة لمساره وتكون مرفقة بالخصائص الفيزيائية للنظام ومن بينها الكتلة دائما. فمركز الثقل لجسم صلب عندما يرفق بكتلة الجسم كاملة يمكن أن يعتبر كنقطة مادية.

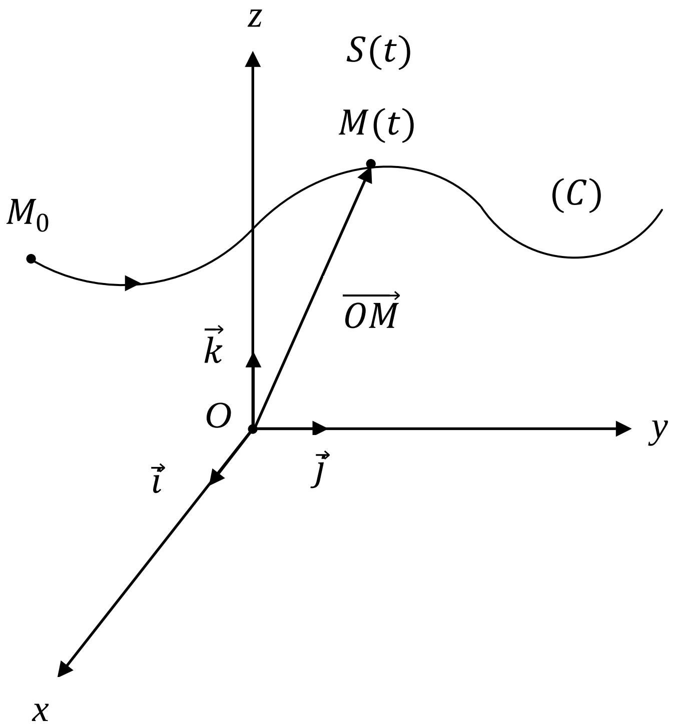
6 - **المسار والفاصلة المنحنية:** نعتبر نقطة مادية M تتحرك بالنسبة لمرجع كما هو مبين على الشكل. المنحنى (C) الذي ترسمه M أثناء حركتها يسمى مسار النقطة M في المرجع المعتبر. نوجه المسار باختيار اتجاه موجب وعندما يكون ممكنا يستحسن اختيار الاتجاه الموجب مطابقا لاتجاه الحركة.

" المسار هو مجموعة النقاط التي يمر بها جسم متحرك بالنسبة لمرجع معين "

في المرجع الديكارتي، يحدد المسار بالمعادلات الوسيطية بدلالة الزمن t : $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$.
(x, y, z) هي إحداثيات النقطة M عند الزمن t. شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ يكتب :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

عندما نعوض الزمن t في هذه المعادلات، نحصل على معادلة المسار (C) للنقطة M التي لا تتعلق بالزمن: $F(x, y, z) = 0$.



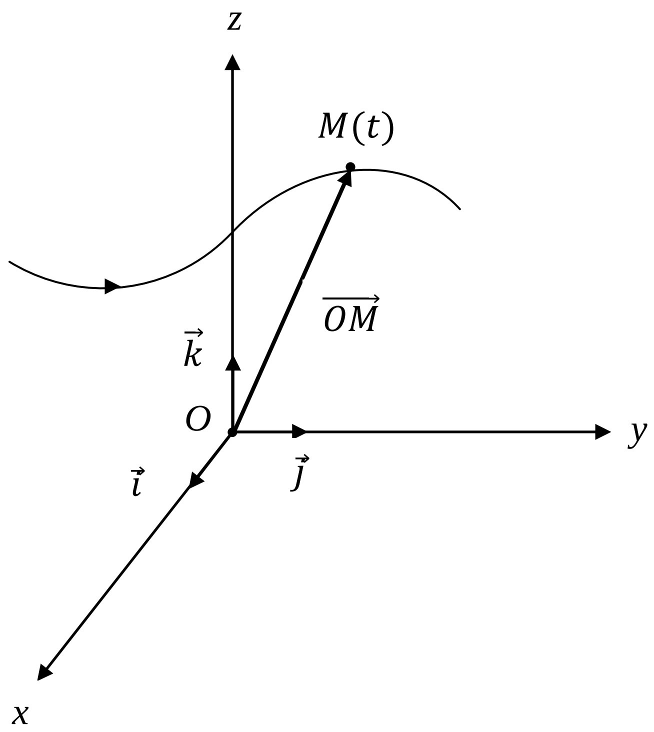
نعتبر نقطة ثابتة M_0 على المسار (هي عادة نقطة بداية الحركة). يمكن أن نحدد موقع النقطة M على المسار (C) عند الزمن t بالطول الجبري للقوس $\widehat{M_0M}$ بحيث نكتب : $\widehat{M_0M} = S(t)$.

$S(t)$ تسمى الفاصلة المنحنية للنقطة M *عند الزمن* t. القانون الذي يعطي كيف تتغير S بدلالة t أي الدالة $S(t)$ يسمى المعادلة الزمنية للحركة.

الفاصلة المنحنية $S(t)$ $\equiv$ المعادلة الزمنية للحركة $S(t)$

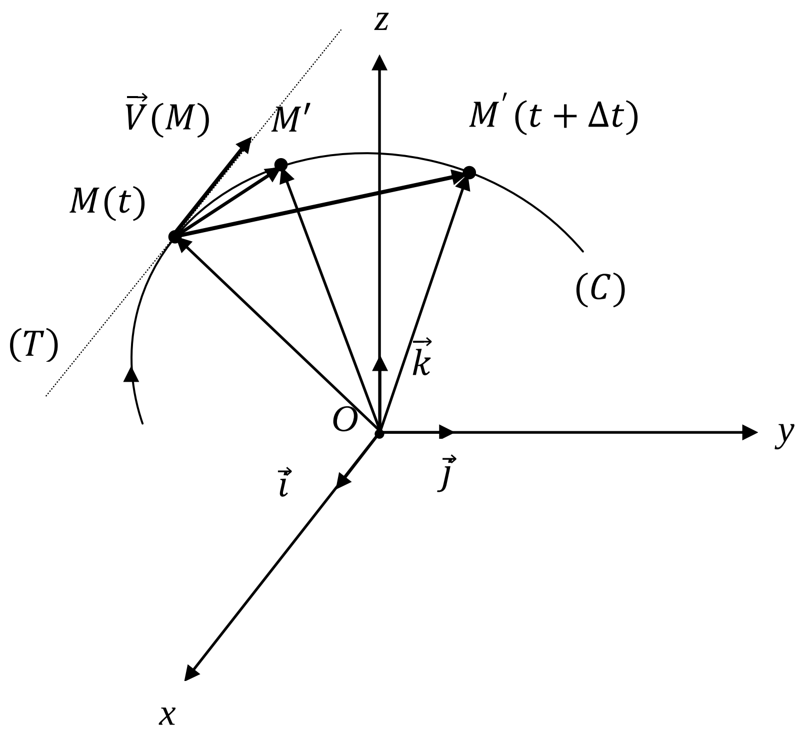
II - شعاع السرعة وشعاع التسارع

1 - شعاع الموقع: في معلم كيفي مبدأه O ، نعتبر نقطة متحركة M على المسار (C). الشعاع $\overrightarrow{OM}(t)$ يسمى شعاع الموقع للنقطة M عند الزمن t. شعاع الموقع يتغير أثناء حركة النقطة M على المسار (C) وهو دالة للزمن t.



2 - شعاع السرعة المتوسطة وشعاع السرعة اللحظية: لتكن نقطة مادية M تتحرك على المسار (C).
نعين موقع النقطة المتحركة عند اللحظة t بالشعاع $\overrightarrow{OM}(t)$ وعند اللحظة $t + \Delta t$ بالشعاع $\overrightarrow{OM'}(t + \Delta t)$. أثناء الزمن $t + \Delta t$، تقطع النقطة المادية مسافة تساوي طول القوس $\widehat{MM'}$.
السرعة المتوسطة بين M و M' هي: $V_{\mathrm{m}} = \frac{\widehat{\mathrm{MM'}}}{\Delta \mathrm{t}}$. نعرف شعاع السرعة المتوسطة للنقطة المتحركة بين M و M' بالمقدار: $\overrightarrow{V_m} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}}/\Delta t$. الشعاع: $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ يسمى شعاع الانتقال أثناء الزمن Δt. لما يكون Δt كبير، فإن المقدار $\overrightarrow{V_m}$ لا يخبرنا بشيء عن الكيفية التي تمت بها الحركة بين M و M'. ولكن كلما كانت قيمة الزمن Δt صغيرة، كانت M' قريبة من M وبالتالي تصير طويلة $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ قريبة من طول القوس $\widehat{MM'}$ ويصير موجه $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ يقترب من التطابق مع المماس (T) للمسار في M . وعندما يؤول Δt إلى الصفر ($\Delta t \to 0$)، أي تكون M' قريبة

جدا من M، فإن المقدار $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ يصير يشير إلى سرعة الجسم المتحرك عند النقطة M نفسها وهو ما نسميه بشعاع السرعة اللحظية عند النقطة M أي عند الزمن t. إذن شعاع السرعة اللحظية يعرف بالعلاقة: $\boldsymbol{\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$



للحصول على المساواة الثانية في العلاقة السابقة، يكفي أن نلاحظ أن:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

إذن: $\boldsymbol{\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d}}$

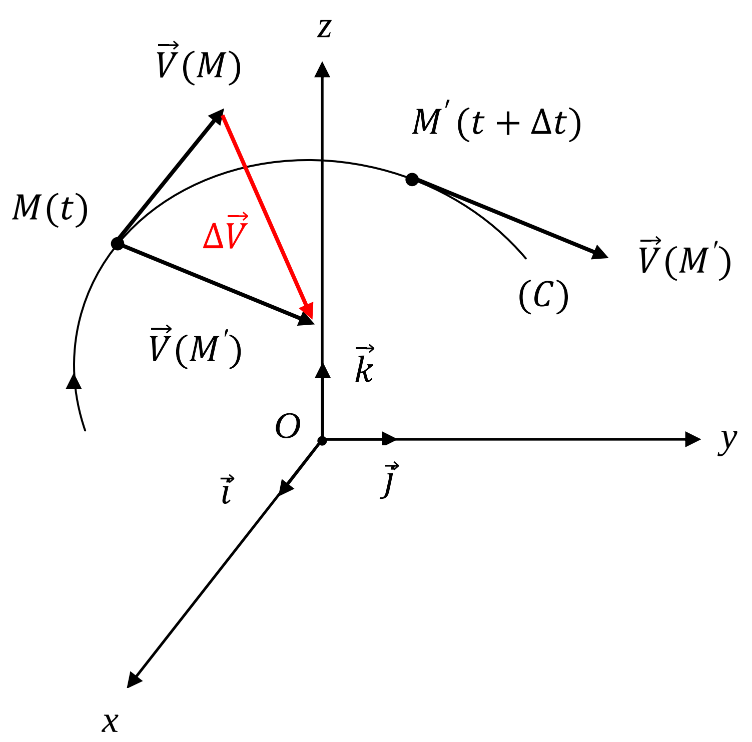
"شعاع السرعة اللحظية $\boldsymbol{\vec{V}(M)}$ عند الزمن $\boldsymbol{t}$ يساوي مشتقة شعاع الموقع $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}(t)}$ بالنسبة للزمن $\boldsymbol{t}$".

شعاع السرعة اللحظية $\vec{V}(M)$ لا يتعلق بالمبدأ O وإنما يتعلق بالنقطة M فقط. فعندما نأخذ مبدأ آخر O' للمعلم الذي ندرس فيه حركة M، يمكننا أن نكتب: $\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$

شعاع السرعة اللحظية $\vec{V}(M)$ يكون دائما محمولا بالمماس للمسار في النقطة M وموجه في اتجاه الحركة. يمكننا أن نكتب دائما: $\boldsymbol{\vec{V}(M)} = \|\boldsymbol{\vec{V}(M)}\|.\boldsymbol{\overrightarrow{u_T}}$ حيث $\overrightarrow{u_T}$ هو شعاع الواحدة المماسي للمسار في M والموجه في اتجاه الحركة

3- شعاع التسارع المتوسط وشعاع التسارع اللحظي: على العموم، يتغير شعاع السرعة $\vec{V}(M)$ أثناء حركة النقطة المادية على مسارها. هذا التغير يسمى التسارع وهو ذو أهمية كبيرة في دراسة الميكانيك الكلاسيكي.

بنفس الطريقة التي عرفنا بها شعاع السرعة المتوسطة نعرف شعاع التسارع المتوسط:



هذا المقدار المتوسط للتسارع لا يبين التغير المستمر للسرعة ويمكن الحصول على معلومات أدق عن هذا التغير لما نجعل Δt يؤول إلى الصفر $(\Delta t \to 0)$. ونحصل عند ذلك على التسارع اللحظي للنقطة المتحركة عند الزمن t:

$$\vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(M') - \vec{V}(M)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

أي: $$\boldsymbol{\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}}$$

" شعاع التسارع هو مشتقة شعاع السرعة بالنسبة للزمن t ".

اتجاه شعاع التسارع كيفي غير أنه يكون دائما موجها نحو تقعر المسار.

III - عبارات شعاع السرعة وشعاع التسارع في جمل الإحداثيات المشهورة

1 - جملة الإحداثيات الديكارتية:

في هذه الجملة، شعاع الموقع يكتب: $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\vec{k}$

إذن: $\vec{V}(M) = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$

أو: $\vec{V}(M) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$

طويلة شعاع السرعة هي: $\|\vec{V}(M)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

شعاع التسارع هو: $\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$

طويلة شعاع التسارع هي: $\|\vec{\gamma}(M)\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

عند معرفة شعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يمكن الحصول على شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}(t)$ كما يلي:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} \implies d\vec{V}(M) = \vec{\gamma}(M)dt$$

أي:

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}} d\vec{V} = \int_{t_0}^{t} \vec{\gamma}(t)dt$$

$\vec{V}_0$ هي السرعة الابتدائية عند الزمن الابتدائي t_0 الذي نأخذه عادة : $t_0 = 0$. حل التكامل السابق يعطينا :

$$\vec{V}(M) - \vec{V}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{\gamma}(t)\, dt$$

المعادلة السابقة تعني أن:

$$V_x(t) - V_{x_0} = \int_{t_0}^{t} \gamma_x(t)\, dt$$

$$V_y(t) - V_{y_0} = \int_{t_0}^{t} \gamma_y\,(t) dt$$

$$V_z(t) - V_{z_0} = \int_{t_0}^{t} \gamma_z\,(t) dt$$

وكذلك لما نكامل شعاع السرعة $\vec{V}(t)$ الذي يكتب $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)dt$ نحصل على:

$$\int_{\overrightarrow{OM}_0}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t)\, dt$$

أي:

$$\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t)\, dt$$

أو:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{V}(t)\, dt + \overrightarrow{OM}_0$$

العبارة الأخيرة مكافئة للمعادلات التالية:

$z(t) = \int_{t_0}^{t} V_z(t)\, dt + z_0$ ، $y(t) = \int_{t_0}^{t} V_y(t)\, dt + y_0$ ، $x(t) = \int_{t_0}^{t} V_x(t)\, dt + x_0$

2 - جملة الإحداثيات القطبية:

في هذه الجملة ،شعاع الموقع يكتب دائما: $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$ مع $\rho = \rho(t)$ و $\vec{u}_\rho = \vec{u}_\rho(t)$.

شعاع السرعة هو: $\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$. وعندما نعوض $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ نكتب :

$$\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{d\rho}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\|\vec{V}(M)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

شعاع التسارع هو: $\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$. ونحصل بعد الإشتقاق على :

$$\vec{\gamma}(M) = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}) = \left(\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\rho}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{2}}\right)\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + (\boldsymbol{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\rho}\ddot{\boldsymbol{\theta}})\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\|\vec{\gamma}(M)\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$$

3 - جملة الإحداثيات الأسطوانية:

شعاع الموقع: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

شعاع السرعة: $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$

$$\|\vec{V}(M)\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

شعاع التسارع: $\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M}) = \left(\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\rho}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{2}}\right)\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \left(\boldsymbol{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\rho}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right)\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$

$$\|\vec{\gamma}(M)\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

4 - جملة الإحداثيات الكروية:

شعاع الموقع: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

شعاع السرعة: $\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

وبما أن $\vec{u}$ يكتب: $\vec{u}_r = sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k}$

فإن: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k} = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = -sin\theta sin\varphi\vec{\imath} + sin\theta cos\varphi\vec{\jmath} = sin\theta\vec{u}_\varphi$$

أي: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi$

إذن: $\boldsymbol{\vec{V}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi}$

و: $\|\vec{V}(M)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2}$

التسارع:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{u}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta\dot{\vec{u}}_\varphi$$

وبما أن:

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\varphi\vec{u}_\varphi$$

و:

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(sin\theta\vec{u}_r + cos\theta\vec{u}_\theta)$$

فإننا نجد بعدما نعوض:

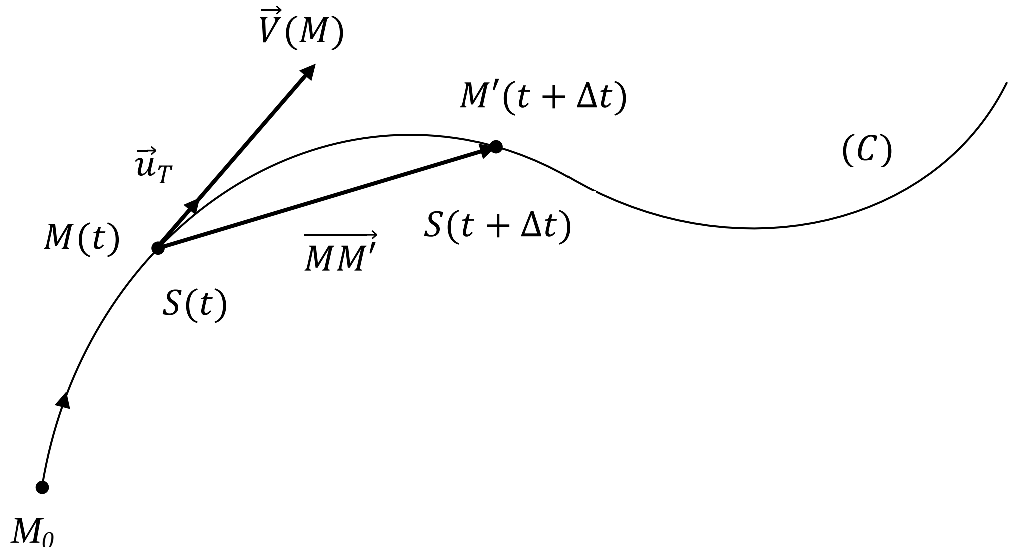
$$\vec{\gamma}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin\theta)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta)\vec{u}_\theta$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta)\vec{u}_\varphi$$

5 - جملة الإحداثيات المنحنية (الذاتية):

- **شعاع السرعة:** عندما يكون مسار النقطة المتحركة منحنيا، يمكن تحديد موقعها باستعمال الفاصلة المنحنية : $\widehat{\mathrm{M}_0 M} = S(t)$. رأينا أن شعاع السرعة اللحظية يكتب:

$$\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

لما: $\Delta t \to 0$ ، فإن: $M' \to M$ ويصير الشعاع $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ مماسي للمسار (C) في M وطويلته $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ تساوي طول القوس $\widehat{MM'}$ حيث : $\widehat{MM'} = \Delta S$. يمكن أن نكتب إذن: $\vec{V}(M) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|} \frac{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \vec{u}_T$



$\vec{u}_T$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\overrightarrow{MM'}$. عندما Δt يؤول إلى صفر $(\Delta t \to 0)$ يصير $\vec{u}_T$ يمثل شعاع الواحدة المماسي للمسار في M والموجه في اتجاه الحركة.

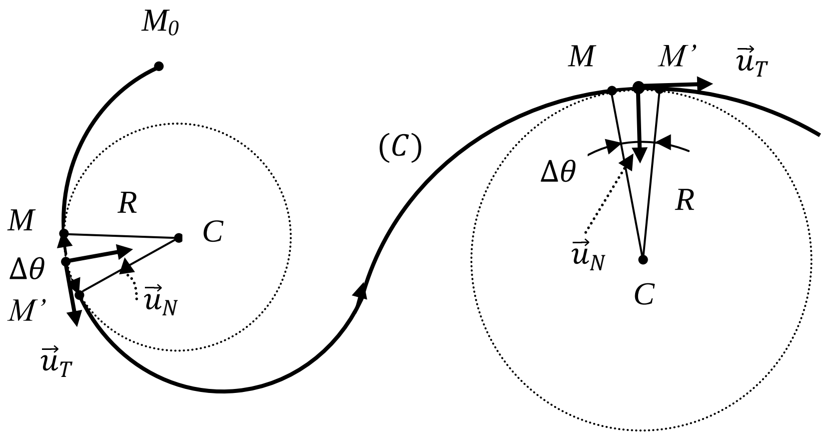
إذن: $\boldsymbol{\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \vec{u}_T = \frac{dS(t)}{dt} \vec{u}_T}$

أو: $\vec{V}(M) = \dot{S}(t)\vec{u}_T$ أو: $\vec{V}(M) = \|\vec{V}(M)\|\vec{u}_T$. إذن: $\|\vec{V}(M)\| = \dot{S}(t)$.

- **شعاع التسارع:** $\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dS(t)}{dt}\vec{u}_T\right]$

أو: $\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2S(t)}{dt^2}\vec{u}_T + \frac{dS(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ مع: $\frac{d^2S(t)}{dt^2} = \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt}$.

للحصول على العبارة الكاملة لشعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يجب حساب $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$. يمكن أن نكتب: $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{dS}\frac{dS}{dt}$. حساب $\frac{\vec{u}_T}{dS}$ يتطلب استعمال مفهوم الانحناء ونصف قطر الانحناء للمسار (C). نعتبر مسار منحني (C) كما هو في الشكل. الجزء العنصري ΔS من المسار يمكن أن يتطابق مع قوس عنصري من محيط دائرة مركزها C ونصف قطرها R .



$CM = CM' = R$, $\widehat{MM'} = \Delta S = R\Delta\theta$

يعرف انحناء المسار (C) عند النقطة M أو M' بتحديد مركز الانحناء C ونصف قطر الانحناء R للمسار عند هذه النقطة. جميع النقاط التي تنتمي إلى القوس $\widehat{MM'}$ لها نفس مركز ونصف قطر الانحناء. نصف القطر CM عمودي على المسار في M. لدينا: $\widehat{MM'} = \Delta S = R\Delta\theta$ حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية التي يحجزها القوس ΔS على الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها R. يمكن أن نكتب إذن:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dS} = \frac{d\vec{u}_T}{Rd\theta} = \frac{1}{R}\frac{d\vec{u}_T}{d\theta} = \frac{1}{R}\vec{u}_N$$

$\vec{u}_N$ هو شعاع الواحدة العمودي على $\vec{u}_T$ في M والموجه نحو مركز الانحناء C. $\vec{u}_N$ هو إذن شعاع الواحدة العمودي على المسار (C) في النقطة M والموجه نحو مركز الانحناء C للمسار.

إذن: $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{R} \vec{u}_N$

وعندما نعوض في عبارة شعاع التسارع نحصل على:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{u}_T + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{R}\vec{u}_N$$

أو: $\vec{\gamma}(M) = \ddot{S}(t)\vec{u}_T + \frac{\dot{S}^2(t)}{R}\vec{u}_N$

أو: $\vec{\gamma}(M) = \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt}\vec{u}_T + \frac{\|\vec{V}(M)\|^2}{R}\vec{u}_N = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{R}\vec{u}_N$

وذلك عند اعتبار: $\|\vec{V}(M)\| = V$

نتائج هامة: في قاعدة الإحداثيات المنحنية (الذاتية) $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$، التسارع $\vec{\gamma}(M)$ هو عبارة عن مجموع مركبتين:

مركبة مماسية للمسار: $\vec{\gamma}_T = \ddot{S}(t)\vec{u}_T = \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt}\vec{u}_T$

ومركبة ناظمية (عمودية) على المسار: $\vec{\gamma}_N = \frac{V^2}{R}\vec{u}_N$

ونكتب : $\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_T(M) + \vec{\gamma}_N(M)$ أو بشكل أبسط: $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$

التسارع المماسي $\vec{\gamma}_T$ ناتج عن تغير شدة السرعة $\|\vec{V}\|$ وأما التسارع الناطمي $\vec{\gamma}_N$ فهو ناتج عن تغير اتجاه شعاع السرعة $\vec{V}$ أي عن انحناء المسار. ويمكن أن نكتب:

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\vec{\gamma}_T^{\,2} + \vec{\gamma}_N^{\,2}} \Leftarrow \vec{\gamma}^2 = \vec{\gamma}_T^{\,2} + \vec{\gamma}_N^{\,2}$$

نصف قطر انحناء المسار (C) في أي نقطة M من (C) هو: $R = \frac{V^2}{\|\vec{\gamma}_N\|}$.

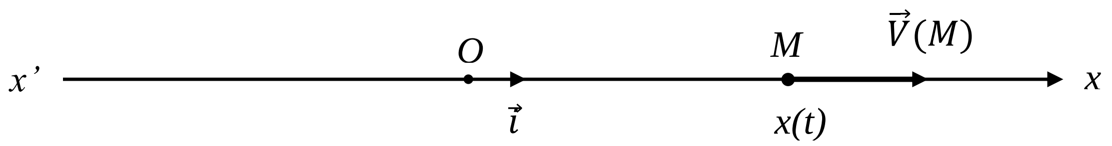
نشير إلى أن $\vec{\gamma}_N$ تكون دائما موجهة نحو مركز الانحناء C أي في اتجاه $\vec{u}_N$ ولكن $\vec{\gamma}_T$ يمكن أن تكون :

في اتجاه $\vec{u}_T$ وذلك عندما تكون الحركة متسارعة أي : $0 < \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt}$ ، أو في الاتجاه المعاكس للشعاع $\vec{u}_T$ لما تكون الحركة متباطئة أي: $0 > \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt}$.

يمكن أن نثبت بسهولة أن: $\gamma_T = \frac{\vec{V}.\vec{\gamma}}{\|\vec{V}\|}$ و $\gamma_N = \frac{\|\vec{V}\wedge\vec{\gamma}\|}{\|\vec{V}\|}$. يكفي لذلك أن نكتب: $\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{u}_T$ و $\vec{\gamma} = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$.

VI- تطبيقات

1 -الحركة المستقيمة: تكون الحركة مستقيمة عندما يكون المسار عبارة عن خط مستقيم. في هذه الحالة، يمكن أخذ المحور $\overrightarrow{x'O}$ كمسار. شعاع السرعة محمول بالمحور وكذلك شعاع التسارع عندما لا يكون معدوما.



$$\vec{\gamma}(M) = \ddot{x}(t)\vec{i} \;\;,\;\; \vec{V}(M) = \dot{x}(t)\vec{i} \;\;,\;\; \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}$$

- **الحركة المستقيمة المنتظمة:** $\|\vec{V}(M)\| = V_0 =$ ثابت ، $\vec{V}(M) = V_0\vec{i}$ ، $\vec{\gamma}(M) = \vec{0}$ ، $V_0 = \frac{dx}{dt} \Leftarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_0 dt \Leftarrow x(t) = V_0 t + x_0$

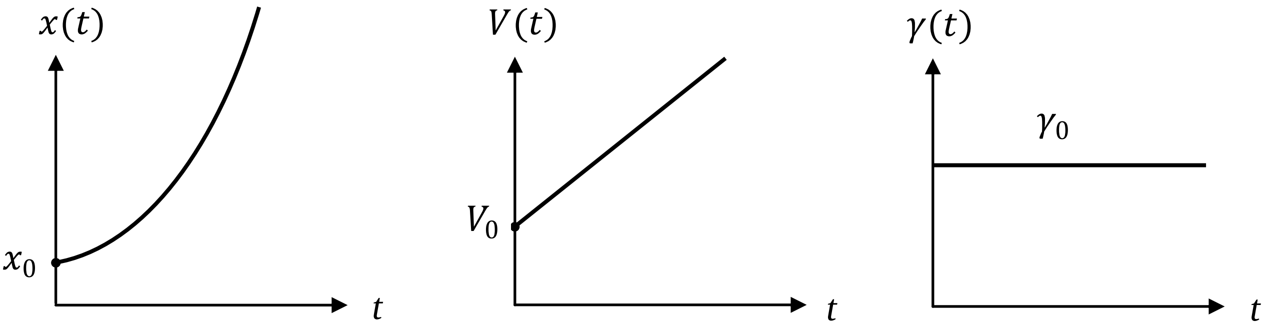
- **الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:** $\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_0 = \overrightarrow{\text{ثابت}}$.

$$\vec{\gamma}(M) = \gamma_0\vec{i} \;\Longrightarrow\; dV = \gamma_0 dt \;\Longrightarrow\; \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t \gamma_0 dt$$

$$V(t) = \gamma_0 t + V_0$$

$$dx = V(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (\gamma_0 t + V_0)\, dt$$

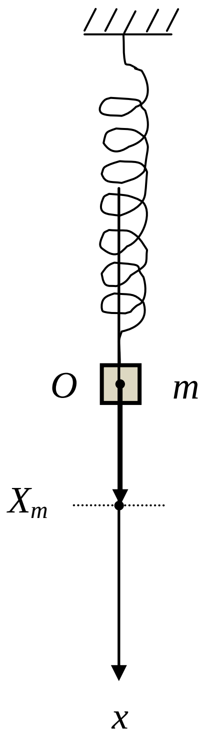
ونحصل على: $x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0$



عندما نعوض t في العبارات السابقة نجد العلاقة المشهورة : $2(x - x_0)\gamma_0 = V^2 - {V_0}^2$

تكون الحركة متسارعة لما تكون $\|\vec{V}\|$ متزايدة، أي $0 < \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$. إذن: $0 < \|\vec{V}\| \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}$

أو: $\vec{V}.\vec{\gamma} > 0$. تكون الحركة متباطئة لما $\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} < 0$ أي: $\vec{V}.\vec{\gamma} < 0$.

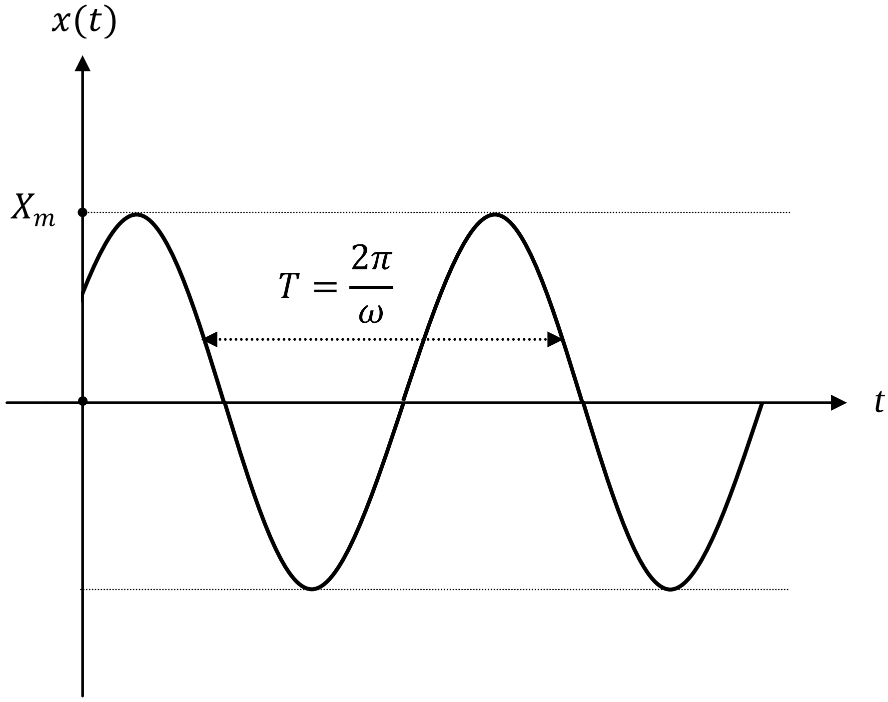


- **الحركة المستقيمة الجيبية:**

في الشكل المقابل، عندما نسحب الكتلة m بالتمدد X_m للنابض على المحور $\overrightarrow{Ox}$ ثم نتركها فإنها تأخذ حركة جيبية مستقيمة معادلتها من الشكل: $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

X_m = السعة ، $\omega t + \varphi$ = الطور عند الزمن t ،

φ = الطور عند الزمن الابتدائي $t_0 = 0$.



$$V(t) = \dot{x}(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\gamma(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

إذن: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

العلاقة الأخيرة تمثل المعادلة التفاضلية للحركة المستقيمة الجيبية. الحل العام لهذه المعادلة يكتب من الشكل:

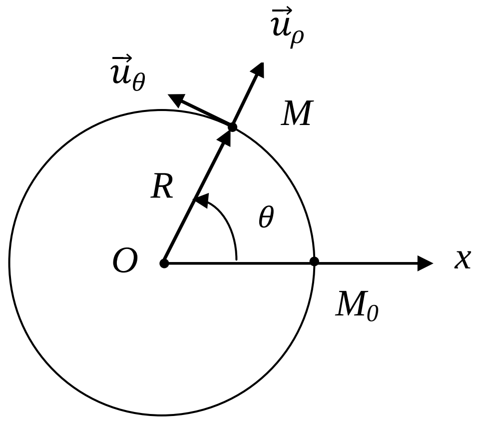
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \sin(\omega t + \varphi') = A cos\omega t + B sin\omega t$$

مع: $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ و $A = -X_m sin\varphi$ و $B = X_m cos\varphi$.

يمكن أن نكتب: $V(t) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ ونقول أن السرعة متقدمة على الحركة في الطور بزاوية $\frac{\pi}{2}$. وبما أن: $\gamma(t) = -\omega^2 x(t) = \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ فإننا نقول أن التسارع والحركة متعاكسين في الطور.

2 -**الحركة الدائرية:** تكون الحركة دائرية عندما يكون مسار الجسم المتحرك عبارة عن دائرة. عندما نأخذ O مركز الدائرة و R نصف قطرها، يستحسن لدراسة هذه الحركة استعمال الإحداثيات القطبية أو المنحنية.

في جملة الإحداثيات القطبية $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ لدينا شعاع الموقع: $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho = R\vec{u}_\rho$.



شعاع السرعة: $\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta$

$\omega = \dot{\theta}$ ويسمى السرعة الزاوية.

شعاع التسارع: $\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$

أو: $\vec{\gamma}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

المقدار: $a = \ddot{\theta} = \dot{\omega}$ يسمى التسارع الزاوي.

$\vec{\gamma}_T = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ و $\vec{\gamma}_N = -R\,\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$.

بالنسبة للإحداثيات المنحنية $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ لدينا: $S(t) = R\,\theta(t)$

و $\vec{u}_T = \vec{u}_\theta$ و $\vec{u}_N = -\vec{u}_\rho$.

يمكن تمييز حركتين دائريتين خاصتين:

- الحركة الدائرية المنتظمة: $\omega = \dot{\theta} = \omega_0 =$ ثابت .

في هذه الحالة لدينا: $\vec{V}(M) = R\omega_0\vec{u}_\theta$ ، $\|\vec{V}(M)\| = R\omega_0$ ، $\vec{\gamma}_T = \vec{0}$ و

$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_N = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N$. وبدلالة الفاصلة المنحنية $S(t)$ لدينا : $= \frac{dS(t)}{dt}$

$\|\vec{V}\| = R\omega_0 \quad \Leftarrow \quad dS = R\omega_0 dt$ وعندما نكامل: $\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t R\omega_0\, dt$ نجد:

$S(t) = R\omega_0 t + S_0$. S_0 هي الفاصلة المنحنية الابتدائية (على الشكل في الأعلى $S_0 = 0$).

$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$ ، $S_0 = R\theta_0$ ، $S(t) = R\theta(t)$.

- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام: $a = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = a_0 =$ ثابت .

لدينا: $\frac{d\omega}{dt} = a_0 \quad \Leftarrow \quad \omega(t) = a_0 t + \omega_0$

و: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \Leftarrow \theta(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

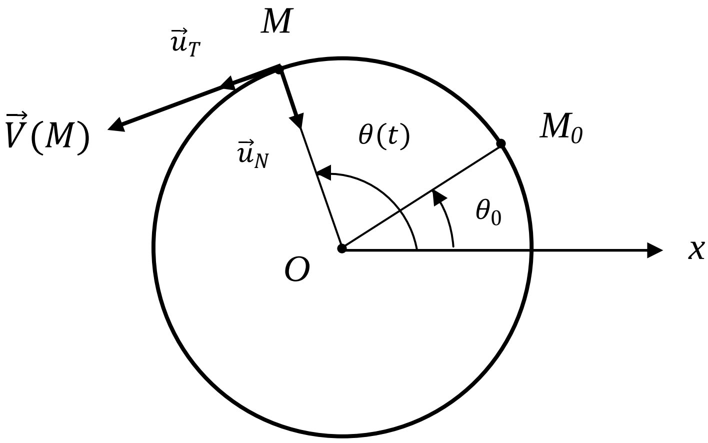
السرعة: $V(t) = R\omega(t) = Ra_0 t + R\omega_0$ أو: $V(t) = Ra_0 t + V_0$.

والفاصلة المنحنية: $S(t) = \frac{1}{2}Ra_0 t^2 + R\omega_0 t + S_0 = \frac{1}{2}Ra_0 t^2 + V_0 t + S_0$.

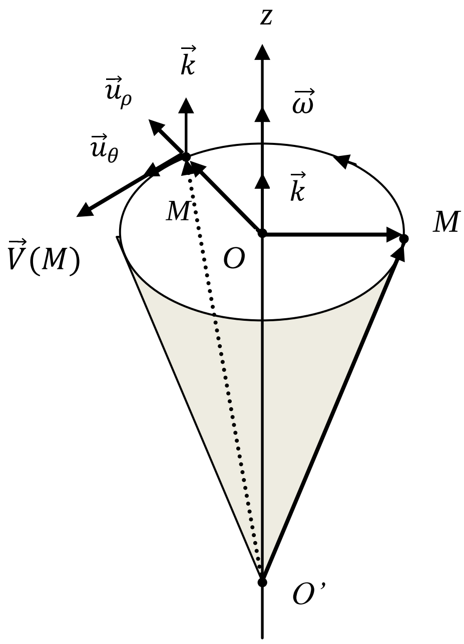
- في جملة الإحداثيات المنحنية يمكن طرح المشكلة بشكل مختلف قليلا كما هو مبين في الشكل التالي، حيث نعتبر بداية الفاصلة المنحنية هي نقطة الانطلاق M_0. في هذه الحالة يمكن أن نكتب:

$\widehat{M_0M} = S(t) = R[\theta(t) - \theta_0]$. ونحصل كما في السابق على :

$\vec{V}(M) = \frac{dS(t)}{dt}\vec{u}_T = R\dot{\theta}(t)\vec{u}_T$ و $\vec{\gamma}(M) = R\ddot{\theta}\vec{u}_T + R\dot{\theta}^2\vec{u}_N$



- **شعاع السرعة الزاوية وشعاع التسارع الزاوي:**



عندما نعرف الحركة الدائرية باستعمال السرعة الزاوية ω كمقدار سلمي، هناك معلومات إضافية عن الحركة تبقى غير معروفة، وعلى الخصوص اتجاه الحركة على الدائرة. يمكن الحصول على هذه المعلومة باعتبار السرعة الزاوية مقدار شعاعي نكتبه $\vec{\omega}$. توجه $\vec{\omega}$ هو المحور $\overrightarrow{Oz}$ الذي تدور حوله النقطة M. $\vec{\omega}$ هو إذن عمودي على مستوي الدائرة واتجاهه هو اتجاه $\vec{k}$ حيث: $\vec{k} = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta$ ونكتب إذن: $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ مع $\omega = \dot{\theta}$. شعاع السرعة $\vec{V}(M)$ يصير إذن:

$$\vec{V}(M) = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

نتيجة: عندما نكتب شعاع السرعة $\vec{V}(M)$ بالنسبة لنقطة O' توجد على المحور $\overrightarrow{Oz}$ يمكن أن نتأكد بسهولة أن:

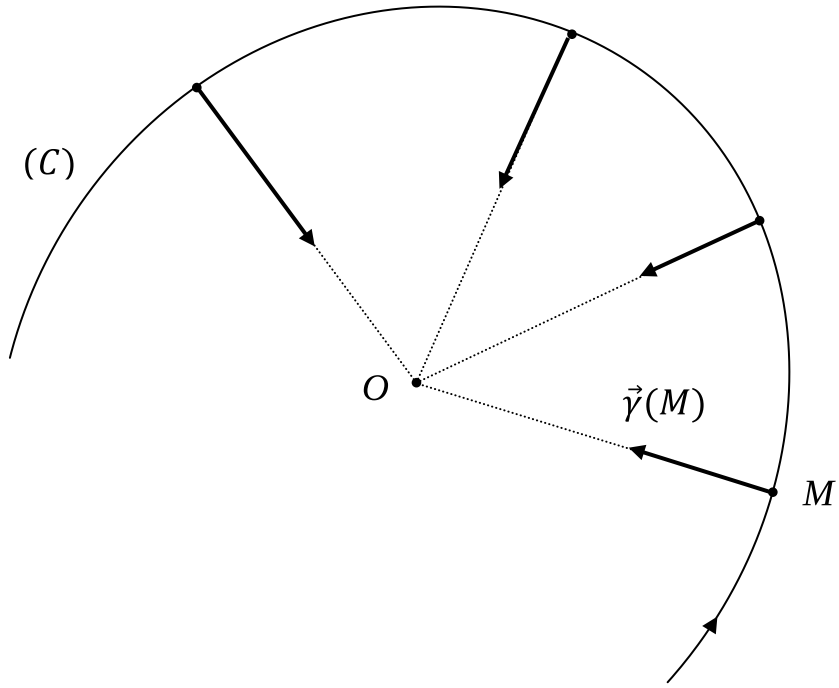
- شعاع التسارع الزاوي هو: $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$. شعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يكتب:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

أو: $\vec{\gamma}(M) = \vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} - \omega^2 \overrightarrow{OM}$

3 - الحركة ذات تسارع مركزي:

تعريف: هي كل حركة يكون فيها تسارع النقطة M موجها دائما نحو نقطة ثابتة O.



يمكن ترجمة هذه الحركة بالعلاقة:

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M) = \vec{0}$$

لهذه الحركة خواص مميزة هي:

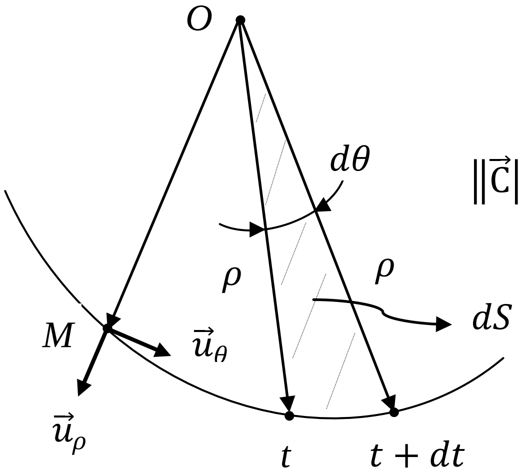
- الشعاع $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)$ هو شعاع ثابت لأن $\frac{d\vec{C}}{\mathrm{dt}} = \vec{0}$.
- الحركة تتم في مستوي يحمل النقطة O. الحركة ذات تسارع مركزي هي إذن حركة مستوية والنقطة O تنتمي لمستوي الحركة. بما أن $\vec{\mathrm{C}}$ ثابت و $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ عمودي على $\vec{\mathrm{C}}$ فهذا يستلزم أن $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ يبقى أثناء الحركة عمودي على اتجاه ثابت أي في مستوي عمودي على $\vec{\mathrm{C}}$ يحتوي النقطة O.
- شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ يمسح مساحات ثابتة في أزمنة ثابتة. لبيان ذلك يستحسن استعمال الإحداثيات القطبية $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ في دراسة هذه الحركة.

لدينا: $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ ، $\vec{\mathrm{V}}(M) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\vec{\mathrm{C}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{\mathrm{V}}(M) = \rho^2\dot{\theta}\vec{k}$ ، $\|\vec{\mathrm{C}}\| = C = \rho^2\dot{\theta} =$ ثابت

المساحة التي يمسحها $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ بين اللحظتين t و $t + dt$

أي أثناء الزمن dt هي: $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$



إذن: $\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$ أو: $\frac{dS}{dt}=\frac{C}{2}$ أو: $\boldsymbol{C=\rho^2\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dS}{dt}}$

العلاقات الأخيرة تعبر عما يعرف بقانون المساحات والمقدار C يسمى ثابت قانون المساحات.

- علاقات بينات ($Binet$): في الحركات ذات تسارع مركزي، القانون $C=\rho^2\dot{\theta}$ يسمح بكتابة V^2 و $\vec{\gamma}$ من دون استعمال الزمن t.

لدينا: $\vec{V}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ مع $\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{\rho^2}$ و $\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

وعندما نعوض نجد: $\vec{V}=\frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\vec{u}_\rho+\frac{C}{\rho}\vec{u}_\theta$

أي: $V^2=\frac{C^2}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\frac{C^2}{\rho^2}$

وبما أن: $\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}=-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ فإن ذلك يستلزم أن:

$V^2=C^2\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)^2\right]$ وتسمى هذه العلاقة "**علاقة بينات الأولى**".

علاقة "**بينات الثانية**" تتعلق بالتسارع الذي يكتب:

لكون التسارع مركزي، فإن المركبة في الاتجاه $\vec{u}_\theta$ معدومة ويمكن التأكد من ذلك بسهولة.

لدينا: $\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right]$ و $\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{\rho^2}$ و $\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}=-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

يمكن أن نكتب إذن: $\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{d}{d\theta}\left[\frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right]\frac{d\theta}{dt}$ أو: $\frac{d^2\rho}{dt^2}=-\frac{C^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

وبما أن: $-\frac{C^2}{\rho^3}=-\rho\frac{C^2}{\rho^4}=-\rho\dot{\theta}^2$ ، فإنه يمكن أن نكتب :

ونحصل بذلك على علاقة "**بينات الثانية**".

أعمال موجهة

التمرين 1: عمود AB طوله l يملك باستمرار طرفه A على المحور $\overrightarrow{Ox}$ وطرفه B على المحور $\overrightarrow{Oy}$ العمودي على $\overrightarrow{Ox}$. نشير ب φ إلى الزاوية التي يصنعها العمود مع المحور $\overrightarrow{Ox}$. ما هو المسار الذي ترسمه النقطة M من العمود المعرفة ب : $AM = b < l$ عندما تتغير φ .

التمرين 2: تعطى إحداثيات نقطة مادية بدلالة الزمن t في المعلم $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ على النحو التالي :

$$x(t) = 2t \qquad \text{و} \qquad y(t) = 4t(t-1)$$

1- عين طبيعة المسار و أرسمه في المعلم الديكارتي ثم حدد نقطة بداية الحركة و اتجاهها.

2- احسب عبارة شعاع السرعة عند اللحظة t ، ثم استخرج طويلته . حدد شعاع السرعة الابتدائية ومثله على الرسم.

3- بين بأن الحركة ذات تسارع ثابت ، أحسب مركبتيه المماسية والناظمية ، ثم استنتج نصف قطر الانحناء. حدد موقع الانحناء الأكبر على المسار ومركزه.

4- ما هي اللحظة الزمنية التي من أجلها يكون شعاعا السرعة و التسارع متعامدين؟ مثلهما على المسار.

5- هل توجد لحظة زمنية يكون فيها الشعاعان متوازيين ؟

<u>التمرين 3 :</u> تتحرك نقطة مادية في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ لجملة الإحداثيات الديكارتية وفق المعادلات الوسيطية : $x(t) = a\,cos\omega t$ و $y(t) = b\,sin\omega t$ ، حيث a ، b و ω مقادير ثابتة موجبة مع $b < a$ و t هو الزمن.

1- ما هي معادلة المسار للنقطة M ؟ مثله بيانيا.

2- أعط شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ ثم أحسب شعاع السرعة $\vec{V}(t)$ للنقطة M وطويلته.

3- أحسب عبارة شعاع التسارع $\vec{\gamma}(t)$ وطويلته.

4- أكتب عبارتي $\vec{V}(t)$ و $\vec{\gamma}(t)$ في الإحداثيات المنحنية $(\vec{U}_T, \vec{U}_N)$. ما هي مركبات شعاع الواحدة $\vec{U}_T$ في جملة الإحداثيات الديكارتية.

5- بين أنه يمكن كتابة مركبات التسارع $\overrightarrow{\gamma(t)}$ في القاعدة $\left(\overrightarrow{U_T}\ ,\ \overrightarrow{U_N}\right)$ من الشكل : $\gamma_T = \frac{\vec{V}.\vec{\gamma}}{\|\vec{V}\|}$

و $\gamma_N = \frac{\|\vec{V}\wedge\vec{\gamma}\|}{\|\vec{V}\|}$ ثم استنتج γ_T و γ_N .

6- أحسب عبارة نصف قطر الانحناء للمسار.

7- حدد فوق المسار أين تكون حركة النقطة M متسارعة وأين تكون متباطئة.

التمرين 4: تعرف حركة نقطة مادية في جملة الاحداثيات القطبية $\left(O, \overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}\right)$ بالمعادلات الوسيطية :

$\rho(t) = at^2 + b$ و $\theta(t) = \omega t$ حيث a و b و ω ثوابت موجبة و t يمثل الزمن.

1- ما هي وحدات الثوابت a و b و ω .

2- ما هي معادلة المسار.

3- احسب شعاع السرعة وشعاع التسارع وطويلتيهما واستنتج شعاع الواحدة المماسي للمسار.

4 – نعتبر الحالة التي تأخذ فيها الثوابت a و b و ω القيم العددية: $a = 1$ و $b = 2$ و $\omega = \pi$.

أرسم مسار النقطة المادية ثم حدد:

أ - موقع النقطة المتحركة لما : $t = 1\ s$ ، $t = 2s$ ، $t = 2.5\ \mathrm{s}$.

ب -شعاع السرعة الابتدائية ومثله على الشكل.

ت -شعاع السرعة لما $t = 2s$ وشعاع التسارع لما $t = 2.5\ s$ ومثل كل شعاع على الشكل.

التمرين 5 : تتحرك نقطة مادية في الإحداثيات القطبية وفق المعادلات الوسيطية :

$$\rho = R(2 + cos\theta) \quad \text{و} \quad \theta = \omega.t$$

1- شكل جدول تغير $\left(\rho\ ,\ \theta\right)$ بدلالة الزمن ثم أرسم مسار الحركة.

2- أحسب المركبات القطبية لشعاعي السرعة و التسارع ، ثم استنتج المركبات الديكارتية الموافقة.

3- أحسب طويلتي السرعة و التسارع و استنتج المركبتين المماسية والناظمية لشعاع التسارع.

4- أحسب نصف قطر انحناء المسار بدلالة الزمن

5- أحسب طول المسار بين اللحظة الابتدائية $t_1 = 0$ و اللحظة $t_2 = 2\pi / \omega$

6- **(إضافي)** أعد الإجابة على جميع الأسئلة السابقة في الحالة التي تكون فيها المعادلات الوسيطية هي:

$\rho = R(1 - sin\theta)$ و $\theta = \omega . t$.

التمرين 6: نعتبر اللولب المعرف في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلات الوسيطية :

$x = R\cos\omega t$ ، $y = R\sin\omega t$ ، $z = \frac{h\ \omega\ t}{2\pi}$ حيث R و h و ω ثوابت موجبة .

1- عبر عن قوس عنصري dS من المسار بدلالة dx ، dy و dz ثم عبر عن dS بدلالة R ، h ، ω و dt .

2- أحسب الفاصلة المنحنية $\mathrm{S(t)} = \acute{\mathrm{M}}_0\grave{\mathrm{M}}$ بين $M_0(t = 0)$ و $M(t)$.

3- في الإحداثيات الأسطوانية معادلات نفس اللولب تكتب:

$\rho = R$ ، $\theta = \omega t$ ، $z = \frac{h\ \omega\ t}{2\pi}$. عبر عن dS بدلالة $d\rho$ ، $d\theta$ و dz ثم استنتج مرة أخرى عبارة dS .

4- ما هي مركبات شعاع الواحدة المماسي $\overrightarrow{\mathrm{U_T}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{ds}}$ في القاعدة $(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$ للإحداثيات الأسطوانية.

5- باستعمال علاقة فرينت $(Frenet)$ $\frac{d\vec{U}_T}{dS} = \frac{\vec{U}_N}{r}$ حدد شعاع الواحدة الناظمي $\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{N}}$ واحسب نصف قطر الانحناء r بدلالة R و h .

6- أوجد عبارات السرعة والتسارع لنقطة M ترسم هذا اللولب في القاعدة $(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$ و بين أن طويلة شعاع السرعة ثابتة.

7- وظف نتائج السؤال السابق للحصول على عبارة نصف قطر انحناء اللولب.

التمرين 7: تعرف حركة نقطة مادية في الإحداثيات الأسطوانية بالمعادلات الزمنية :

$$Z(t) = 2\sqrt{2}re^{\omega t} \quad , \quad \rho(t) = 2re^{\omega t} \quad , \quad \theta(t) = \omega t$$

حيث ω , r ثابتان موجبان. أوجد :

1- المركبات الأسطوانية لشعاعي السرعة و التسارع و طويلتيهما.

2- المركبات الديكارتية للسرعة و التسارع.

3- المركبتين المماسية و الناظمية لشعاع التسارع

4- أستنتج نصف قطر الانحناء و إحداثيات مركز الانحناء.

5- أحسب طول المسار الذي تقطعه النقطة بين اللحظتين الابتدائية و t.

التمرين 8 (من امتحان 2015): تتحرك نقطة مادية في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ وفق المعادلة الزمنية:

$$y(t) = (t-1)^2 \quad و \quad x(t) = t$$

1 - عين معادلة المسار ثم مثله في المعلم. حدد نقطة بداية الحركة M_0.

2 - استخرج عبارتي شعاعي السرعة $\vec{V}$ والتسارع $\vec{\gamma}$. اوجد قيمة شعاع السرعة الابتدائية $\overrightarrow{V_0}$ ومثله على المسار.

3 - احسب شعاعي التسارع المماسي $\overrightarrow{\gamma_T}$ والناظمي $\overrightarrow{\gamma_N}$ ثم استخرج عبارة نصف قطر الانحناء.

4 - على مسار النقطة المتحركة : ا- أين تكون الحركة متسارعة ب- أين تكون الحركة متباطئة ج- أين تكون طويلة السرعة صغرى. في الحالة الاخيرة ج- مثل شعاعي السرعة والتسارع على المسار واستنتج قيمة نصف قطر الانحناء.

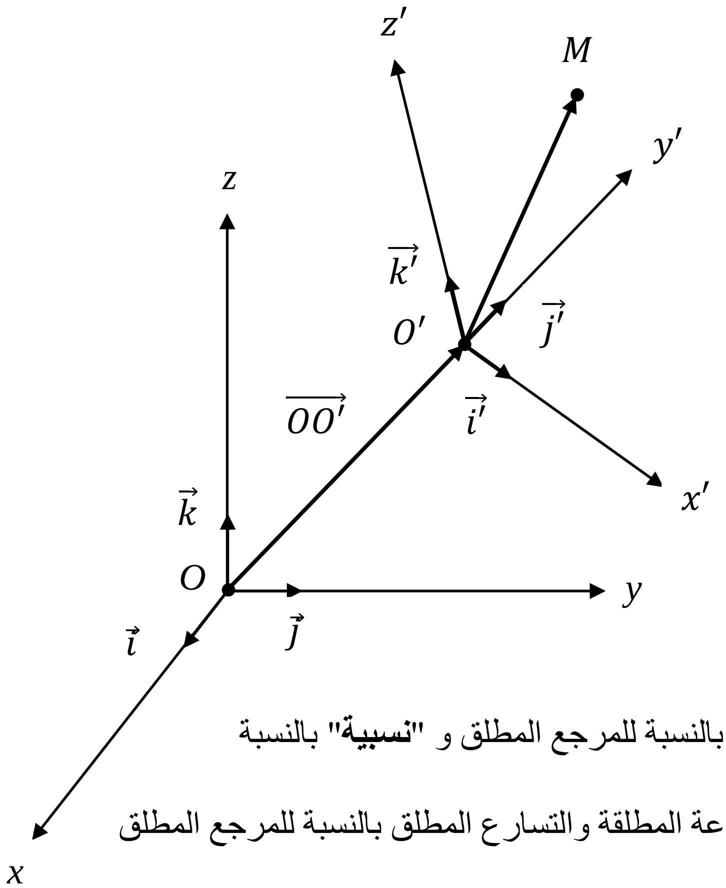
الفصل الرابع: الحركة النسبية أو تركيب الحركات

مقدمة: قد نكون أحيانا في حاجة لمعرفة حركة نقطة مادية بالنسبة لمرجع معين بعدما عرفنا حركتها بالنسبة لمرجع آخر هو أيضا في حالة حركة بالنسبة لهذا المرجع.

عند دراسة حركة معقدة لنقطة مادية، يمكن تفكيك هذه الحركة إلى مجموعة حركات بسيطة تسند فيها كل حركة إلى مرجع محدد ثم نعيد تركيب هذه الحركات وفق قوانين خاصة للحصول على الحركة الأصلية.

الهدف من هذا الفصل هو معرفة القوانين التي تسمح بتركيب هذه الحركات. القوانين التي نحصل عليها في حالة حركتين يمكن تعميمها على عدد أكبر من الحركات.

1- المرجع النسبي، المرجع المطلق:



نعتبر في الحركة النسبية دائما مرجعين:

- مرجع ثابت $\mathcal{R}$ مرتبط بالمعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ويسمى **المرجع المطلق**.

- مرجع متحرك $\mathcal{R}'$ مرتبط بالمعلم $(O',\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'},\overrightarrow{k'})$ ويسمى **المرجع النسبي**.

المقادير الحركية لنقطة مادية تسمى "**مطلقة**" بالنسبة للمرجع المطلق و "**نسبية**" بالنسبة للمرجع النسبي. ولهذا سوف نتكلم هنا عن السرعة المطلقة والتسارع المطلق بالنسبة للمرجع المطلق والسرعة النسبية والتسارع النسبي بالنسبة للمرجع النسبي. حركة المرجع النسبي تكون معروفة تماما في المرجع المطلق لما يكون الشعاع $\overrightarrow{OO'}(t)$ والأشعة $\overrightarrow{i'}(t)$ ، $\overrightarrow{j'}(t)$ ، $\overrightarrow{k'}(t)$ معروفة.

2- السرعة المطلقة والسرعة النسبية:

لتكن نقطة متحركة M معلمة في المرجع المطلق بالإحداثيات (x, y, z) أو شعاع الموقع $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ وفي المرجع النسبي بالإحداثيات (x', y', z') أو شعاع الموقع $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}$.

سرعة M في المرجع الثابت تسمى السرعة المطلقة وتكتب: $\boldsymbol{\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}$

وفي المرجع المتحرك تسمى السرعة النسبية وتكتب: $\boldsymbol{\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\overrightarrow{i'} + \dot{y}'\overrightarrow{j'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'}}$.

3- التسارع المطلق والتسارع النسبي:

لنفس النقطة المتحركة السابقة نعرف التسارع المطلق:

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}}$$

والتسارع النسبي:

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \ddot{x}'\,\overrightarrow{i'} + \ddot{y}'\,\overrightarrow{j'} + \ddot{z}'\,\overrightarrow{k'}}$$

4- تركيب الحركات:

في عملية تركيب الحركات، نعتبر أن حركة M في المرجع النسبي معروفة وكذلك حركة المرجع النسبي بالنسبة للمرجع المطلق.

- **تركيب السرعة:**

شعاع الموقع في المرجع المطلق يكتب: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ وهذا يعطينا شعاع السرعة المطلقة: $\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$. وبما أن $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}$ فإننا نحصل على:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\,\overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\,\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\,\overrightarrow{k'} + x'\,\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y'\,\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z'\,\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

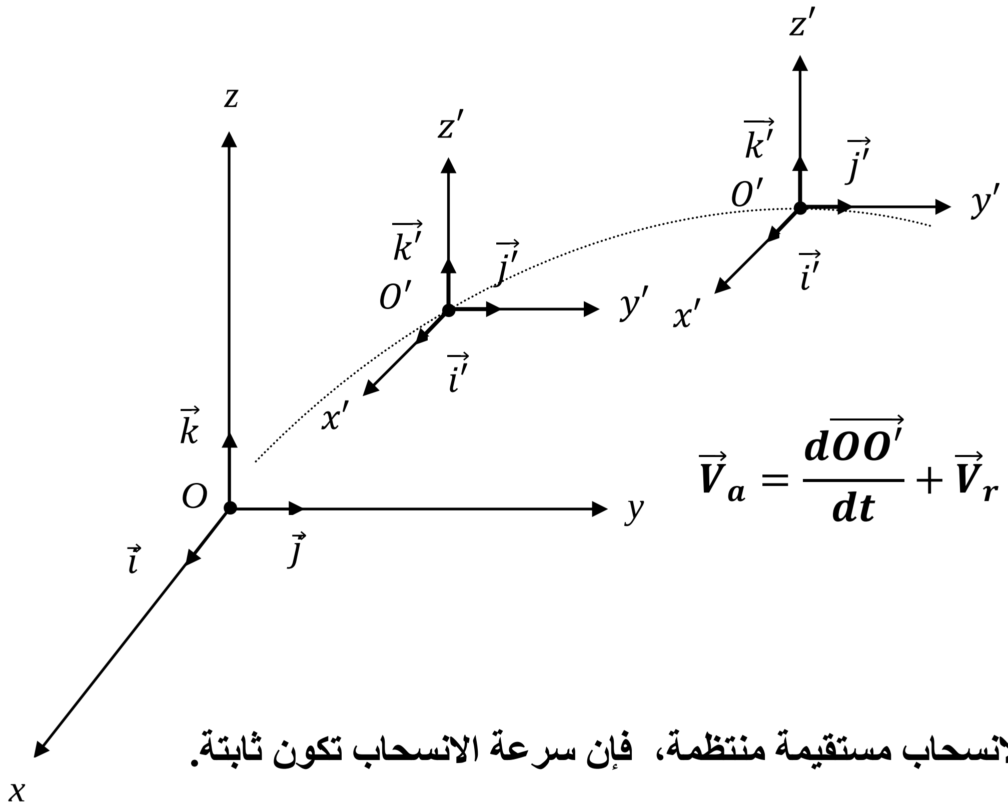
وعندما نعوض السرعة النسبية $\vec{V}_r = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}$ في العلاقة السابقة، نحصل على:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} + \vec{V}_r$$

أو: $$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$$

حيث: $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$ وتسمى السرعة المكتسبة (*Vitesse d’entrainement*). $\vec{V}_e$ تمثل سرعة النقطة التي تتطابق مع M في اللحظة t وتبقى ثابتة في المرجع النسبي وتتعلق بحركة O' ودوران الأشعة $\vec{i'}$ و $\vec{j'}$ و $\vec{k'}$ في المرجع المطلق.

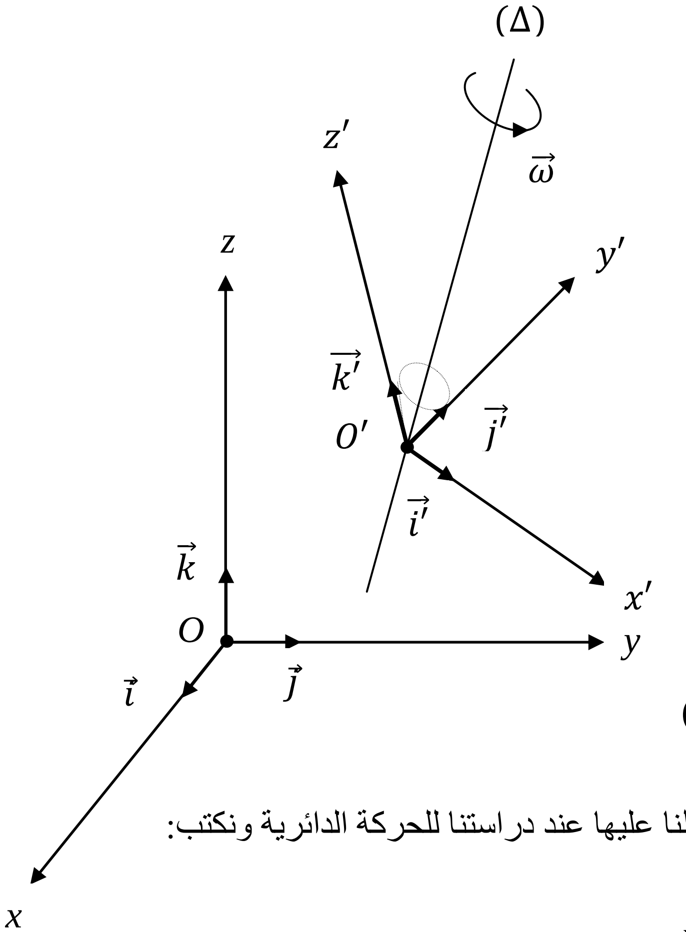
- **حالة الانسحاب:** لما تكون حركة المرجع النسبي هي فقط حركة انسحاب بالنسبة للمرجع المطلق، فإن أشعة الواحدة $\vec{i'}$ و $\vec{j'}$ و $\vec{k'}$ تبقى ثابتة ونحصل على: $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{V}_T$ لأن $\frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{0}$. $\vec{V}_T$ هي سرعة انسحاب المرجع $\mathcal{R}'$ بالنسبة للمرجع $\mathcal{R}$.



$$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}}{\boldsymbol{dt}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$$

عندما تكون حركة الانسحاب مستقيمة منتظمة، فإن سرعة الانسحاب تكون ثابتة.

▪ **حالة الدوران:** نعتبر O' ثابتة والمرجع $\mathcal{R}'$ يدور حول المحور (Δ) بشعاع السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ في المرجع المطلق $\mathcal{R}$.



في هذه الحالة، السرعة المكتسبة $\vec{V}_e$ تكتب:

$\vec{V}$

لأن $\overrightarrow{OO'}$ ثابت، أي: $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$.

ولكون الأشعة $\overrightarrow{i'}$ و $\overrightarrow{j'}$ و $\overrightarrow{k'}$ تدور حول المحور (Δ)

بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ ، يمكن أن نستعمل النتيجة التي تحصلنا عليها عند دراستنا للحركة الدائرية ونكتب:

$\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{i'}$ و $\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{j'}$ و $\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k'}$. ولما نعوض في $\vec{V}_e$ نحصل على:

$$\vec{V}_e = x'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{i'} + y'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{j'} + z'\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{k'}$$

أو: $$\vec{V}_e = \vec{\omega}\wedge\left(x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}\right) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

ونستنتج أن: $$\boldsymbol{\vec{V}_a = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{V}_r}$$

في الحالة العامة التي تكون فيها حركة المرجع النسبي هي دوران وانسحاب معا، يمكن أن نكتب:

$$\boldsymbol{\vec{V}_a = \vec{V}_T + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{V}_r}$$

أو: $$\boldsymbol{\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{V}_r}$$

- **تركيب التسارع:** انطلاقا من المعادلات التي تحصلنا عليها عند تركيب السرعة المطلقة، يكتب التسارع المطلق كما يلي:

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\,\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'} + x'\,\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\,\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\,\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\,\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\vec{k'} + x'\,\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\,\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\,\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

ويمكن أن نكتب: $\boldsymbol{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e}$

حيث:

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\,\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\,\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\,\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\,\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2y'}{dt^2}\,\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\vec{k'} + x'\,\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2}$$

$\vec{\gamma}_e$ يسمى التسارع المكتسب و $\vec{\gamma}_c$ يسمى التسارع المكمل أو الإضافي المشهور بتسارع

كوريوليس (*Coriolis*) .

في الحالة العامة التي يملك فيها المرجع النسبي $\mathcal{R}'$ حركة انسحاب ودوران في نفس الوقت بالنسبة

للمرجع المطلق $\mathcal{R}$ ، لدينا: $\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{i'}$ و $\frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{j'}$ و $\frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{k'}$ مما يؤدي إلى:

$$\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{i'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{i'})$$

$$\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{j'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{j'})$$

$$\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{k'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})$$

وعندما نعوض في عبارة $\vec{\gamma}_a$ نجد:

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM'})$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

وفي النهاية نحصل على التسارع المطلق، مع الإشارة إلى أن $\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$:

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM'}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{\gamma}_r}$$

يكون $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ لما: $\vec{\omega} = \vec{0}$ أو $\vec{V}_r = \vec{0}$ أو $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$. يكون $\vec{\gamma}_e = \vec{0}$ لما: $\vec{\omega} = \vec{0}$ و $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$. ونستنتج إذن أن $\boldsymbol{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r}$ فقط لما تكون حركة المعلم النسبي هي **حركة مستقيمة منتظمة** بالنسبة للمرجع المطلق.